مهاربندی قابهای مفصلی

محمد حسام حدیدی دانشجوی کارشناسی عمران دانشگاه آزاد کرمانشاه

چکیده

در این مقاله با استفاده از نظریه گرافها روشی جهت تعداد حداقل مهارها و محل آنها ، به منظور صلب کردن قابهای $m \times n$ دهانه ای مفصلی ارایه می گردد. در این روش با استفاده از نظریه گرافها ،می توان به سرعت و سهولت ، صلب بودن را بررسی کرد و بر اساس نیازهای معماری ، گزینه هائی برای مهاربندی قاب تعیین و گزینه بهینه را انتخاب کرد و در محاسبات بعدی به کار برد.

واژه های کلیدی : صلبیت قاب ، قاب همبند ، گراف

۱- مقدمه

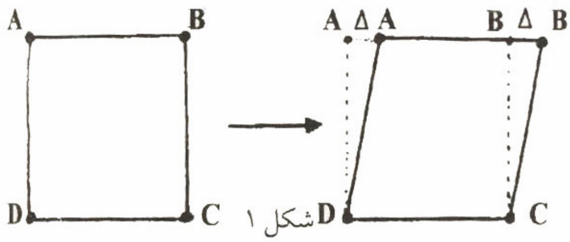
مهاربندی یکی از روشهای اقتصادی و پر بازده برای مقابله با بارهای جانبی در سازه های قابی است.از نظر تاریخی ، مهارها از پایان قرن ۱۹ تا اکنون برای پایداری جانبی اکثر ساختمانهای بلند دنیا مورد استفاده بوده اند. به عنوان مثال مجسمه آزادی که در سال ۱۸۸۳ در نیویورک ساخته شد، یکی از سازه های مهاربندی شده بزرگ است. در سه دهه بعد از آن تعدادی زیادی ساختمان بلند با قاب فولادی مهاربندی شده در شیکاگو و نیویورک ساخته شد. ساختمان ۵۷ طبقه وولورد (Woolword) به ارتفاع ۲۴۱ متر که در سال ۱۹۱۳ تکمیل گردید رکورد دار ساختمانهای بلند در آن زمان بود.
در این مختصر مجال بررسی تاریخچه مهاربندیها و انواع آنها نمی باشد و بررسی رفتار مهاربندها نیز موضوع این مقاله نیست. سعی ما در اینجا ارائه روشی جهت صلب کردن قابها $m \times n$ دهانه مفصلی است. کاربرد این روش بیشتر در صلب سازی کفهای سازه می باشد. قالب بندی کف نه فقط بارهای وزن را بین ستونها توزیع می کند، بلکه از لحاظ انتقال نیروهای جانبی مانند دیافراگمی صلب عمل می نماید.
در اینجا صلبت در این قابها دو پرسش مطرح میشود.
اول اینکه از نظر اقتصادی حداقل به چه تعداد مهار نیاز دارد ؟ به عبارت دیگر تعداد حداقل مهارهای لازم جهت صلب کردن قاب چند تا است؟

Email : hessam777@yahoo.com

پرسش دوم که اهمیت کاربردی بیشتری دارد این است که این تعداد مهار در چه دهانه هایی باید استفاده شوند ؟
چه بسا مواردی که مهارهای استفاده شده در اینجا صلبیت در قاب از تعداد حداقل آن بیشتر بوده ولی قاب همچنان صلب نشده باقی است. پاسخ این پرسش از نظر معماری نیز حایز اهمیت است. چرا که در مواردی ممکن است مهندس معمار به دهانه های باز در سقف نیاز داشته باشد (مانند نورگیرها) و پاسخ به این پرسش به طراح این امکان را میدهد که با یافتن چندین گزینه ، گرینه ای را که با نیازهای معماری سازه همگون است،در محاسبات بعدی لحاظ کند.

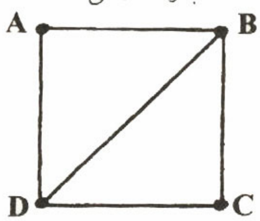
۲- تعریف صلبیت در قاب

قابی را صلب تعریف می کنیم که اگر بتوان تغییر مکان یا چرخشی در یکی از اعضای آن ایجاد کرد ، این تغییر مکان یـا چـرخش در سـایر اعضای قاب نیز ایجاد گردد. یعنی تمامی قاب به طور یکپارچه حرکت داشته باشد. به عنوان مثال شکل ۱ ، قاب صلب نمی باشد، چرا کـه نقـاط A و B به اندازه Δ حرکت کرده اند ، ولی نقاط C و D هیچ تغییر مکانی نداشته اند .



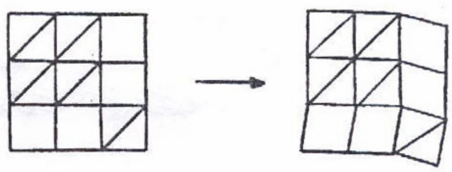
شکل ۱

شکل ۲ یک قاب یک دهانه صلب را نشان می‌دهد.

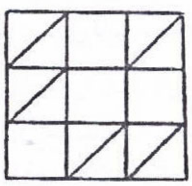


شکل ۲

به همین ترتیب قاب شکل الف – ۳ صلب نیست چرا که می تواند به صورت شکل ب –۳ تغییر شکل بدهد. اما قاب شکل ۴ صلب است.



شکل ۳



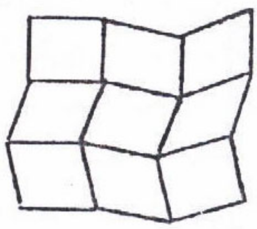
شکل ۴

در مقایسه ای ساده بین این دو قاب اخیر ، مشاهده می کنیم که هر دو دارای ۵ مهار هستند ، اما وضعیت مناسب در قاب شکل ۴ موجب صـلب شـدن این قاب شده است .

۳- عملکرد مهار در قاب از نظر صلبیت

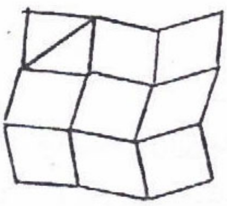
در ادامه لفظ قاب در مواردی به کار رفته که قاب مفصلی باشد. یعنی تمامی اتصالات به صورت مفصل ایجاد شده باشند.
همچنین در بررسی حرکت قاب از انحنای محور اعضاء و تغییر شکلهای محوری صرف نظر می کنیم.

با تعریفی که از صلبیت در قسمت قبل ارایه شد ، چنانچه یک عضو یا دهانه را ثابت در نظر بگیریم و تغییر مکان سایر اعضاءنسبت به آن صفر باشد ، و امکان هیچ تغییر مکان داخلی دیگری نیز میسر نباشد ، آن قاب صلب می باشد.
اکنون قاب شکل ۵ را در نظر می گیریم . این قاب تغییر شکل داده است ، ولی به علت پیوسته بودن اجزای قاب در هر ردیف اعضای قائم موازی هم باقی مانده اند. هم چنین در هر ستون اعضای افقی موازی هم می باشند .



شکل ۵

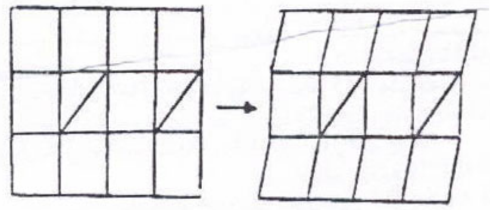
حال اگر یک مهادر در یکی از دهانه‌های قاب به کار رود (مثلاً شکل ۶) از آنجایی که زاویه بین اعضای افقی و قائم این دهانه ثابت می‌ماند (۹۰ درجه) ، زاویه بین امتدادهای اعضای قائم ردیف دهانه و اعضای افقی ستون دهانه نیز ثابت باقی خواهد ماند .
با این توضیحات اگر بتوان چنان عمل کرد که زاویه بین هر دو عنصر ثابت بماند ، یعنی این که حرکت تمامی اعضاء با هم انجام گیرد ، قاب را صلب کرده‌ایم . توضیح بیشتر آن که ، به دلیل پیوستگی اجزای قاب و عدم تغییر شکل محوری اعضاء ، همه تغییر مکانهای داخلی قاب دورانی و ناشی از دوران در مفاصل قاب می‌باشد .



شکل ۶

۴- تأثیر دو مهار در یک ردیف یا یک ستون

قابی را در نظر می‌گیریم که در یک ردیف یا یک ستون دارای ۲ مهار باشد (شکل ۷) . اعضای افقی و قائم به ترتیب موجود در ستون و ردیف هر مهار با هم تغییر مکان می‌دهند . اما دو مهار در یک ردیف (یا ستون) با هم مشترکند . لذا اعضای قائم در ردیف مشترک بااعضای افقی در ستونهای دو مهار با هم تغییر مکان می‌دهند . در نتیجه می‌توان گفت اعضای افقی و قائم موجود در ستونها و ردیفهای مربوط به هر دو مهار با هم تغییر مکان می‌دهند .



شکل ۷

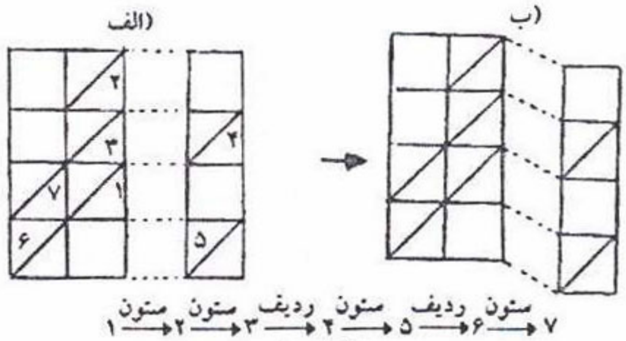
به بیان دیگر قرار گرفتن یک مهار در امتداد مهار دیگر موجب اتصال (فرضی) بین اعضای دهانه‌های مربوط به مهارها و اعضای قائم یا افقی (به ترتیب) هم ردیف یا هم ستون آنها می‌شود .

برای تعمیم این مسأله می‌توان n مهار ، ۱ تا n را در نظر گرفت ، به طوری که مهار i ام در ردیف یا ستون مهار (۱- i)ام باشد . در این صورت کلیه اعضای افقی موجود در ستون و قائم موجود در ردیف این‌مهارها با هم حرکت خواهند کرد (شکل الف –۸) .

۵- چه هنگام قاب صلب می‌شود ؟

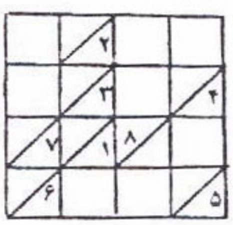
در شکل الف-۸ مشاهده می‌کنیم که هنوز بعضی از اعضاء می‌توانند جدای از اعضای موازی با دهانه‌های مهاربندی شده حرکت کنند . مثلاً قاب به صورت شکل ب-۸ درآید .

اعضایی که با هم حرکت می‌کنند به صورت خط (-) و اعضایی که با آنها حرکت نمی‌کنند به صورت نقطه چین (...) نمایش داده شده‌اند .



شکل ۸

چنانچه در قابی تمامی اعضای به صورت خط باشند ، یعنی این که تمامی اعضاء با هم حرکت می‌کنند و قاب صلب است . برای نیل به این مقصود غیر از این که باید در هر ردیف و هر ستون یک مهار موجود باشد ، باید ارتباطی زنجیروار بین این مهارها برقرار گردد . یعنی مهار iام در ردیف یا ستون مهار (۱- i)ام باشد . با اضافه کردن مهار هشتم در قاب شکل قبل این قاب صلب خواهد شد (شکل ۹)



شکل ۹

۶- حداقل تعداد مهارها

در ادامه با استفاده از نظریه گرافها ثابت خواهیم کرد که برای یک قاب $m \times n$ دهانه تعداد حداقل مهارها برابر ۱- $m+n$ است .

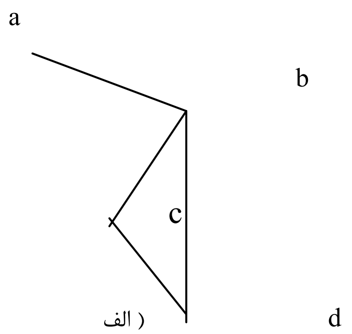
۷- استفاده از نظریه گرافها

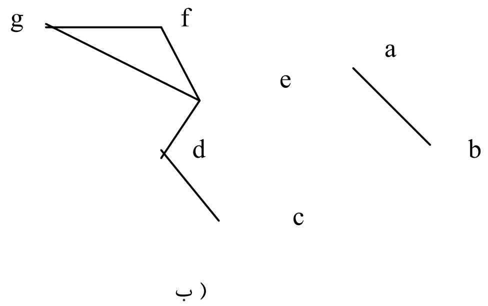
قبل از استفاده از نظریه گرافها به تعریف چند اصطلاح که در مراحل بعدی مورد نیاز است می‌پردازیم :

الف -تعریف گراف

یک گراف شامل دو مجوعه است . یکی مجموعه‌ای ناتهی بنام V ، که در این مجموعه نقاطی بنام رؤوس گراف قرار گرفته‌اند و دیگری مجموعه‌ای که درآن یالهای گراف قرار دارند . این مجموعه را با E نمایش می‌دهیم . یالهای گراف خطوطی هستند که رؤوس گراف را به هم متصل می‌کنند . یک چنین گرافی را با $G = (V$ و $E)$ نمایش می‌دهیم .

اگر بین دو رأس a و b یک یال وجود داشته باشد ، می‌گوییم بین a و b یک مسیر موجود است ، و چنانچه بااستفاده از یالهای موجود در گراف بتوان از دو رأس دلخواه به یکدیگر رسید ، گوییم بین این دو رأس مسیری وجود دارد .





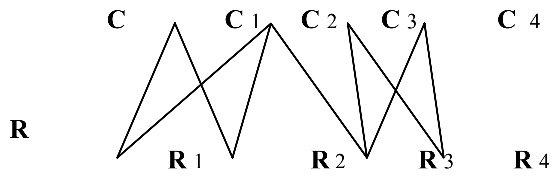
شکل ۱۰

ب - تعریف گراف همبند

اگر بین هر دو رأس از یک گراف حداقل یک مسیر موجود باشد ، آن گراف همبند است (شکل ۱۰ – الف) .
گراف شکل ۱۰ – ب ناهمبند است ، چون هیچ مسیری برای رفتن a به c وجود ندارد .

ج - تعریف گراف دوبخشی

هر گراف که مجموعه رؤوسش به دو زیر مجموعه مجزای R و C افراز شود ، به قسمتی که یالهایش فقط میان R و C باشند ، گراف دو بخشی نامیده می‌شود (شکل ۱۱) .



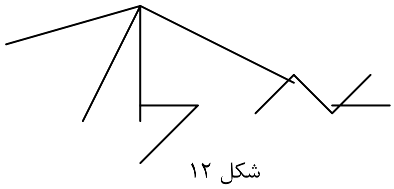
شکل ۱۱

د- تعریف دور

به مسیری که به نقطهٔ شروع خود بازگردد دور می‌گوییم .

ه - تعریف درخت

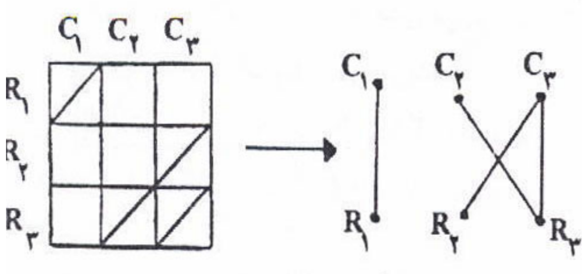
یک درخت یک گراف همبند بدون دور است (شکل ۱۲) .



شکل ۱۲

۸- کاربرد گراف در تعیین محل مهاربندیها

یک قاب $m \times n$ دهانه‌ای را در نظر می‌گیریم و متناظر با آن گراف دو بخشی G را می‌سازیم . در این گراف مجموعه R ، m رأس و مجموعـه C ، n رأس دارد . چنانچه در قاب ، ردیف i ام و ستون j ام مهاربندی شده باشد ، بـین رأس i ام از مجموعـه R و رأس j ام از مجموعـه C یـک یـال رسـم می‌کنیم (شکل ۱۳) .
از آنجا که بین رأسهای دو ردیف یا دو ستون ، مهاربندی معنای فیزیکی ندارد ، یالهای گراف حاصل فقط بین C ها و R ها خواهند بود و گراف حتماً دو بخشی است .
همچنین از هر قاب فقط یك گراف به دست می‌آید و از هر گراف فقط یك قاب می‌توان ایجاد نمود ، لذا این تناظر یك به یك است .



شکل ۱۳

چنانچه در گراف نظیر ، دویال در یک رأس مشترک باشند ، به این معنی است که در قاب اصلی و ردیف یا ستون نظیر آن رأس ، دو مهـار وجـود دارد . در شکل ۱۳ یالهای R_2C_3 و R_3C_3 در رأس C_3 مشترکند ، یعنی در قاب مربوط به آن در ستون شماره ۳ دو مهار قرار گرفته است .
برای این که قاب صلب باشد باید اولاً در هر ردیف و ستون یک مهار باشد . برای این که ارتباط بین تغییر مکانها برقرار باشد ، باید مهار iام در ردیف یـا ستون مهار (i -۱)ام باشد . لذا در گراف نظیر باید یال iام با یال (i -۱)ام در یک رأس مشترک باشد . این مسأله ایجاب می‌کند که یالهای این گراف مانند زنجیری به هم متصل بوده و تمامی رؤوس گراف را بپوشانند . به عبارتی بهتر قاب هنگامی صلب است که گراف نظیر آن همبند باشد .

۹ - حداقل تعداد مهار ها

دو گراف شکلهای الف – ۱۴ و ب – ۱۴ را در نظر بگیرید . این دو گراف هر دو همبند هستند و قاب متناظر با آنها صلب می‌باشد . اما گراف شکل ب – ۱۴ دو یال کمتر دارد . چرا ؟

شکل ۱۴

برای همبند بودن گراف کافی است از هر رأس بتوان به بقیه رأسها رفت . این امر در هر دو گراف میسر است .اما تفـادت ایـن دو در تعـداد مسـیرهای موجود بین این رأسها می‌باشد . در گراف ب-۱۴ چون هیچ دوری وجود ندارد ، یک مسیر منحصر به فرد برای رفتن از رأسی به رأس دیگر وجود دارد (*قضیه : در یک گراف همبند بدون دور (درخت) هر دو رأس با یک مسیر یکتا به هم وصل می‌شوند*) . ولی در گراف الـف – ۱۴ بـه علـت وجـود دور ، برای ، برای رفتن از برخی رؤوس به رؤوس دیگر بیش از یک مسیر وجود دارد . مثلاً برای رفتن از رأس ۱ به رأس ۲ ، سه مسـیر موجـود اسـت . علـت وجود دورها و مسیرهای اضافی ، یالهای اضافی می‌باشند .

حال با توجه به اینکه هر یال بیانگر یک مهار می‌باشد ، حداقل تعداد مهارها هنگامی است که گراف نظیر بدون دور باشد . یعنی درخت باشد .

اگر بتوان تداد یالهای یک درخت n رأسی را پیدا کرد ، تعداد حداقل مهارهای لازم بدست می‌آید . قضیه زیر بیانگر تعداد یالهای یک درخت n رأسـی است .

قضیه : در یک درخت n رأسی تعداد یالها برابر (n-۱) است .

اثبات : با استقراء قوی روی n ثابت می‌کنیم .

اگر n=۱ درخت یالی ندارد و n-۱=۰ .

حال فرض می‌کنیم به ازای به ازای k ، ... ، ۱ = j درخت با i رأس دارای (i -۱) یال است . اگر G درختی با (k+۱) رأس باشد ، یک یال دلخواه از G حذف می‌کنیم (توجه شود که وقتی یک یال حذف می‌شود ، دو رأس آن باقی می‌مانند) ، بنابر اینکه در هر درخت مسیر بین هر دو رأس یمتاست ، گراف حاصل ناهمبند خواهد بود . زیرا دو رأس یال حذف شده با هیچ مسیری به هم متصل نیستند .

بنابراین ،G به دو مؤلفه تقسیم شده که هر دو همبند و بدون دور و در نتیجه درخت هستند و هر یک از این درختهـا کمتـر از (k + ۱) رأس دارنـد . مثلاً یکی v رأس و دیگری w رأس دارد که v + w = k + ۱ و v < k ، w . لذا بنابر فرض استقراء یکی از این درختها (v – ۱) یال و دیگـری (w – ۱) یال دارد ، یک یال را هم که خودمان حذف کردیم . پس تعداد یالها G برابر است با :

$$(v - ۱) + (w - ۱) + ۱ =$$
$$v + w - ۱ =$$
$$(k + ۱) - ۱ = k$$

به این ترتیب حکم استقراء ثابت است .

اکنون با استفاده از قضیۀ فوق و با توجه به اینکه درخت حاصل از قاب m × n دهانه ، n+ m رأس دارد ، در می‌یابیم که این درخت m + n – ۱ یـال دارد . در نتیجه جهت صلب کردن هر قاب m × n دهانه‌ای حداقل به m + n – ۱ مهار نیاز دارد .

۱۰- نتیجه گیری

جهت صلب کردن هر قاب مفصلی m × n دهانه حداقل به m + n – ۱ مهار نیاز است ، به طوری که گراف دو بخشی نظیر آن قاب همبند باشد .

در این گراف به تعداد ردیفها ، m رأس جداگانه و به تعداد ستونها ، n رأس جداگانه داریم ، که بین دو رأس i (از رئوس مربوط به ردیفها) و رأس j (از رئوس مربوط به ستونها) ، فقط و فقط هنگامی یک یال وجود دارد که در قاب اصلی در ردیف iام و ستون j ام مهار داشته باشیم .

۱۱- منابع

دکتر اسماعیل بابلیان , مباحثی در ریاضیات گسسته ، انتشارات مبتکران ، ۱۳۷۵ .

ترجمه دکتر حسن حاجی کاظمی ،آنالیز و طراحی سازه‌های بلند ، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ، ۱۳۷۵ .

ترجمه محمد صادق منتخب ،گراف و کاربردهای آن ، مرکز نشر دانشگاهی ، ۱۳۷۴ .