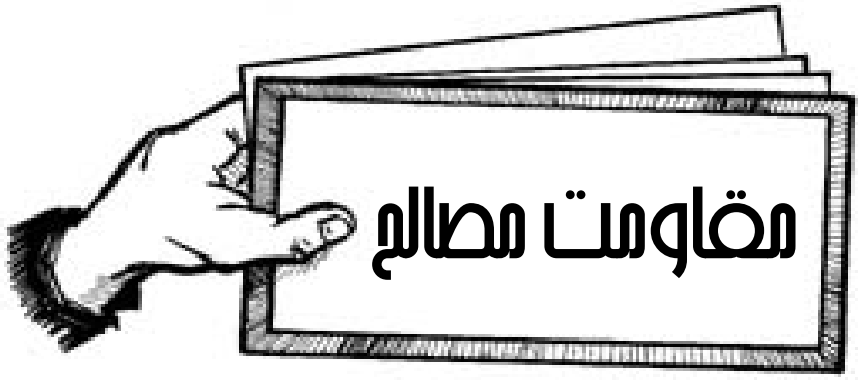
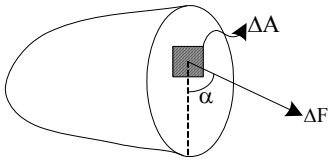


- تنش و کرنش:

- یادآوری تعاریف:

- تنش:

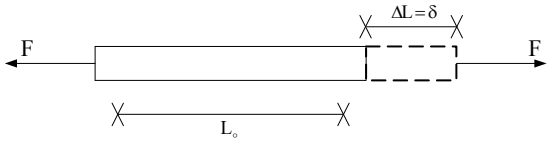


$$\begin{cases} \text{تنش برشی} \quad \tau = \dfrac{\Delta F.\cos\alpha}{\Delta A} \\ \text{تنش عمودی (نرمال)} \quad \sigma = \dfrac{\Delta F.\sin\alpha}{\Delta A} \end{cases}$$

- واحدها: واحدهای تنش همان واحدهای فشار می‌باشند. $(Pa, KPa, MPa, ...)$

$$1Pa = \frac{1N}{1m^2} \qquad 1kgf/cm^2 = \frac{9/81N}{10^{-4}m^2} \simeq 10^5 Pa$$

- کرنش: عبارتست از نسبت تغییر طول به طول اولیه. (کمیت بی بعد)



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

- قانون هوک:

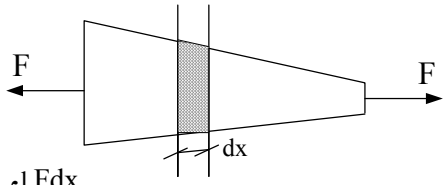
$$\sigma = E\varepsilon$$

که در آن E مدول یانگ است و به عنوان مثال برای فولاد $\dfrac{2/1\times10^6 kg/cm^2}{\left(=2\times10^5 MPa\right)}$ می‌باشد (هم واحد تنش)

- بیان دیگر قانون هوک:

(برای میله با مقطع ثابت و نیروی ثابت)

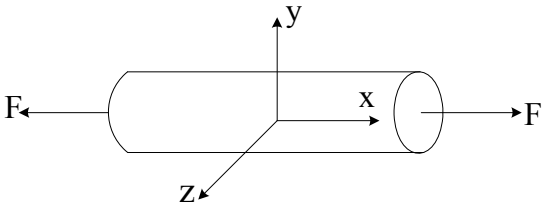
$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A} \Rightarrow \delta = \dfrac{FL}{EA} \\ \sigma = E\varepsilon \end{cases}$$



و در حالت کلی داریم:

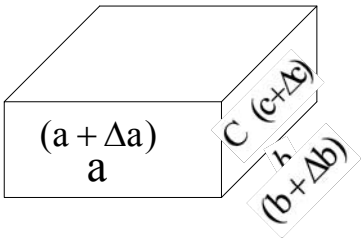
$$\delta = \int_0^l \frac{Fdx}{EA}$$

- ضریب پواسون:



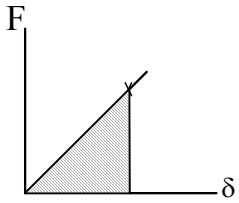
(ضریب پواسون) $\nu = \dfrac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \dfrac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$

– در مورد کرنش حجمی داریم:



کرنش حجمی $\varepsilon_V = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \Rightarrow \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

– انرژی کرنش:



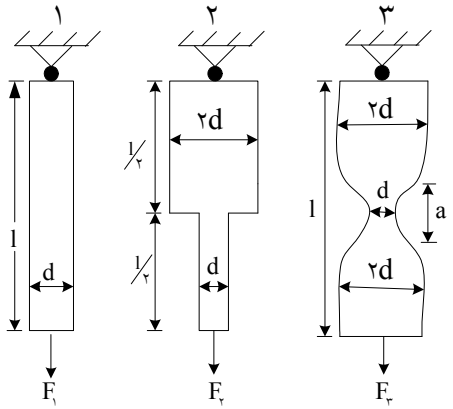
$$U = \frac{F\delta}{۲} = \frac{F^۲ L}{۲EA} \qquad \left(\delta = \frac{FL}{EA}\right)$$

نکته: روش جمع اثرها در این جا صادق نیست، چون انرژی با مجذور F رابطه دارد و رابطه‌شان خطی نیست.

– انرژی کرنش واحد حجم:

$$u = \frac{U}{V} \quad (U \to \text{انرژی},\ V \to \text{حجم}) \qquad \Rightarrow u = \frac{F^۲}{۲EA^۲} = \frac{\sigma^۲}{۲E} = \frac{\varepsilon\sigma}{۲} = \frac{E\varepsilon^۲}{۲} \qquad (V = AL)$$

مثال: با فرض تنش مجاز یکسان برای هر ۳ میله، انرژی کرنش آنها را با هم مقایسه نمائید:



$$F_۱ = F_۲ = F_۳ = (\sigma_{all})\left(\pi \frac{d^۲}{۴}\right) = F \qquad U_۱ = \frac{F^۲ l}{۲EA}$$

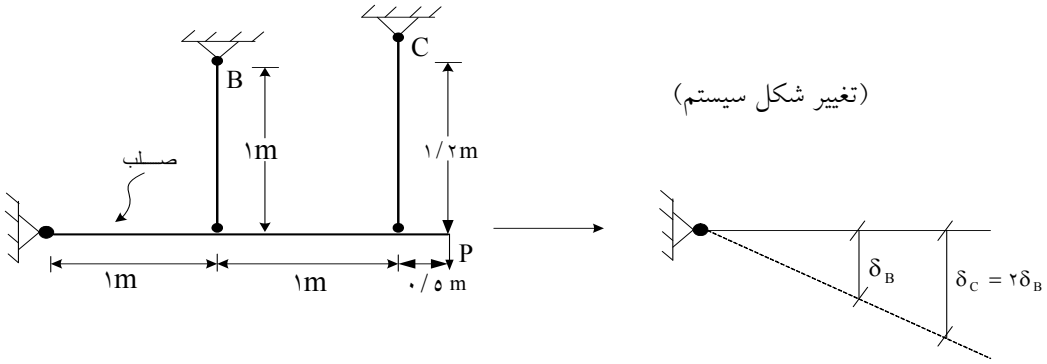
$$U_۲ = \frac{F^۲\left(\frac{l}{۲}\right)}{۲EA} + \frac{F^۲\left(\frac{l}{۲}\right)}{۲E \times ۴A} = \frac{۵F^۲ l}{۱۶EA} = \frac{۵}{۸}U_۱ \qquad U_۳ \simeq \frac{F^۲ l}{۲E \times ۴A} \simeq \frac{۱}{۴}U_۱$$

$(a << l)$

– مسائل هیپراستاتیکی (در نیروی محوری): در اینگونه مسائل مجهول اضافی را با حل معادلهٔ سازگاری تغییر شکل‌ها به دست می‌آوریم.

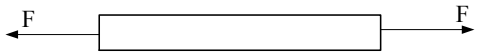
مثال: (کنکور ارشد ۷۵). برای سیستم نشان داده شده در نتیجه اعمال بار P کرنش در میلهٔ c برابر ۵×۱۰^{-۴} حاصل گردیده است. میزان تنش ایجاد شده در میلهٔ B برابر چند $\frac{N}{mm^۲}$ است؟ $\left(E = ۲\times۱۰^۵ \frac{N}{mm^۲}\right)$

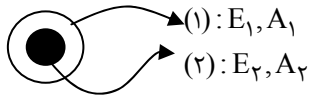
۱) ۶۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰



$$\delta_C = ۲\delta_B \quad , \quad \sigma_B = E\varepsilon_B = E\frac{\delta_B}{l_B} = E\frac{\frac{\delta_C}{۲}}{\frac{l_C}{۱/۲}} = ۰/۶E\frac{\delta_C}{l_C} = ۰/۶E\varepsilon_C = ۰/۶\times۲\times۱۰^{۵}\times۵\times۱۰^{-۴} = ۶۰\frac{N}{mm^{۲}}$$

- میله‌های ۲ یا چند جنس (از حالات دیگر مسائل هیبر استاتیکی):



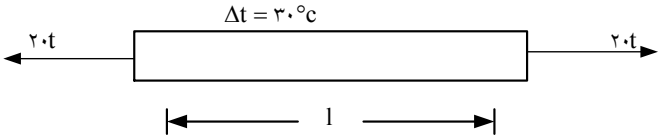


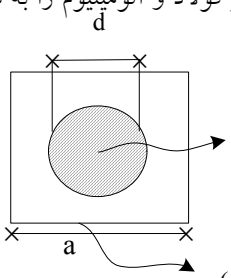
روی مرز بین دو جنس داریم: $\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲$

$$\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲ \Rightarrow \frac{\sigma_۱}{E_۱} = \frac{\sigma_۲}{E_۲}(*) \quad , \quad F = F_۱ + F_۲ = \sigma_۱A_۱ + \sigma_۲A_۲(**)$$

$$(*)\ ,\ (**) \Rightarrow \sigma_۱ = \frac{F}{\underbrace{A_۲ + A_۱\frac{E_۲}{E_۱}}_{\text{مقطع معادل از جنس ۱}}} \quad , \quad \sigma_۲ = \frac{F}{\underbrace{A_۲ + A_۱\frac{E_۱}{E_۲}}_{\text{مقطع معادل از جنس ۲}}}$$

مثال: نیروی وارد بر فولاد و آلومینیوم را به دست آورید:





فولاد (S) $\begin{cases} d = ٤cm \\ E_s = ۲\times۱۰^{٦} \\ \alpha_s = ۱۱\times۱۰^{-٦} \end{cases}$

آلومینیوم (a) $\begin{cases} a = ٦m \\ E_a = ۰/۷\times۱۰^{٦} \\ \alpha_a = ۲۳\times۱۰^{-٦} \end{cases}$

حل

$\delta = \delta_a = \delta_s$ تغییر طول کل میله — تغییر طول فولاد — تغییر طول آلومینیوم

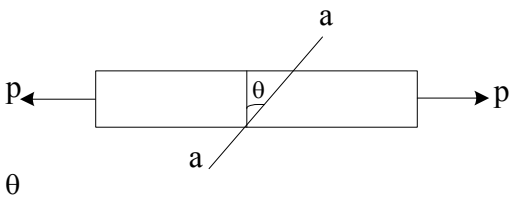
$$\Rightarrow \frac{F_aL}{E_aA_a} + \alpha_aL\Delta t = \frac{F_sL}{E_sA_s} + \alpha_sL\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{F_a\cancel{L}}{(۰/۷\times۱۰^{۶})(۳۶-۴\pi)} + \cancel{L}\times۲۳\times۱۰^{-۶}\times۳۰ = \frac{F_s\cancel{L}}{(۲\times۱۰^{۶})(۴\pi)} + \cancel{L}\times۱۱\times۱۰^{-۶}\times۳۰$$

$$\Rightarrow ۰/۰۳۹۸F_s - ۰/۰۶۰۹F_a = ۳۶۰ \quad (*) \quad , \quad F_a + F_s = ۲۰۰۰Kg \quad (**)$$

$$(*),\ (**) \Rightarrow F_s = ۱۵۶۷۰\ \ Kg \quad , \quad F_a = ۴۳۳۰\ \ Kg$$

- تنش وارد بر صفحه مایل در بارگذاری محوری:



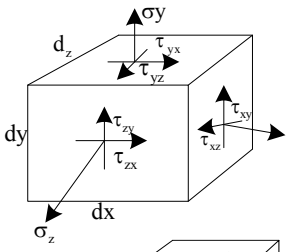
$$\sigma_{a-a} = \frac{P}{A}\cos^{۲}\theta$$

$$\tau_{a-a} = \frac{P}{۲A}\sin ۲\theta$$

(A: سطح مقطع عمود بر محور عضو)

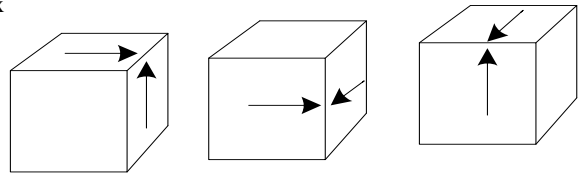
با توجه به روابط فوق σ وقتی ماکزیمم است که صفحه مقطع عمود بر محور عضو باشد $(\theta = 0)$ و مقدار آن برابر $\frac{P}{A}$ می‌باشد و وقتی تنش برشی τ ماکزیمم است که صفحه مقطع با صفحه قائم زاویه 45° بسازد و مقدار آن $\frac{P}{2A}$ است (یعنی نصف مقدار ماکزیمم تنش قائم)

- تانسورهای تنش: به طور کلی هر المان از یک جسم که تحت اثر نیرو قرار دارد ۹ مؤلفه تنش دارد که ۳ تای آنها تنش‌های قائم و ۶تای آنها تنش‌های برشی هستند (که البته این تنش‌های برشی مستقل از هم نبوده و ۲ به ۲ با هم برابرند.)



$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$$
$$|\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$$
$$|\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$$

- به هر کدام از حالات زیر یک برش خالص می‌گویند:



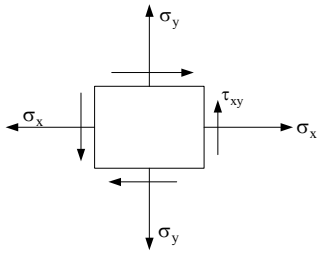
نکته: اگر المان تحت برش خالص را 45° بچرخانیم، تنش عمودی (σ) ماکزیمم و برش صفر خواهد شد.

نکته: برش خالص طول اضلاع را تغییر نمی‌دهد.

- کرنش برشی:

$$\gamma = \frac{T}{G} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

- روابط دایره مور:



$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در حالتی که σ_x و σ_y هم علامت باشند:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\max\left(|\sigma_{max}|, |\sigma_{min}|\right)$$

در حالتی که σ_x و σ_y مختلف‌العلامت باشند:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)$$

برای کرنش‌ها نیز داریم:

$$\varepsilon_{max,min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

- **انبساط حجمی:** برای المانی که تحت تنش‌های σ_x و σ_y، σ_z است داریم:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta v}{v} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

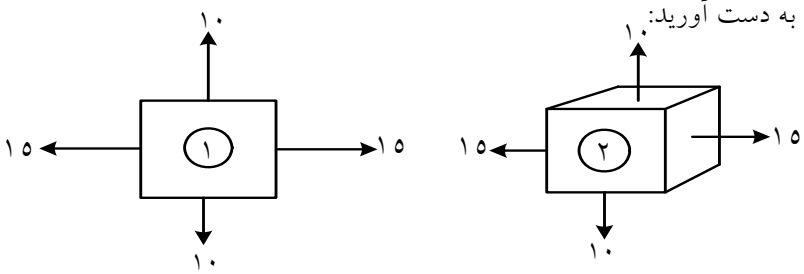
* در حالت خاص که جسم تحت اثر فشار هیدرواستاتیک P قرار گرفته باشد (یعنی $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$)

داریم:

$$\varepsilon_v = -\frac{3(1-2\nu)P}{E} = -\frac{P}{K} \quad , \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

(k مدول حجمی ماده است که با E هم دیمانسیون است)

مثال: مقدار تنش برش حداکثر در دو حالت زیر را به دست آورید:



۱: المان دو بعدی است و چون تنش برشی نداریم، پس تنش‌های نشان داده شده تنش‌های حداکثر و حداقل (اصلی) هستند پس:

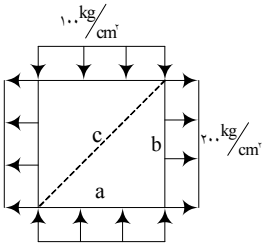
$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱۵-۱۰\right)=۲/۵$$

۲: المان ۳ بعدی است و چون تنش برشی نداریم، تنش‌های نشان داده شده تنش‌های اصلی هستند، با این تفاوت که این بار تنش حداقل، تنش در بعد سوم، یعنی صفر است، پس:

$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱۵-۰\right)=۷/۵$$

مثال: (کنکور ارشد ۸۳)- صفحه مربع شکل به اضلاع ۱۰ سانتی‌متر تحت تأثیر تنش‌های σ_x و σ_y مطابق شکل قرار دارد. تغییر طول قطر صفحه چقدر است؟ $\left(\nu=۰/۳\ ,\ \ E=۲\times۱۰^{۶}kg/cm^{۲}\right)$

حل



$$\varepsilon_x=\frac{۱}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right)=\frac{۲۰۰+۰/۳\times۱۰۰}{E}=\frac{۲۳۰}{E}\qquad \varepsilon_y=\frac{۱}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right)=\frac{-۱۰۰-۰/۳\times۲۰۰}{E}=-\frac{۱۶۰}{E}$$

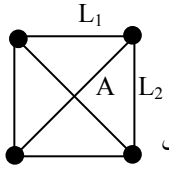
$$\Rightarrow \Delta a=a\varepsilon_x=۱۰\times\frac{۲۳۰}{E}\quad ,\quad \Delta b=b\varepsilon_y=-۱۰\times\frac{۱۶۰}{E}$$

نکته: از بسط رادیکال، $\sqrt{۱+\varepsilon}=۱+\frac{۱}{۲}\varepsilon$ ثابت می‌شود:

$$\Delta C\ \text{قطر (تغییر طول قطر)}=\frac{\Delta a\ \text{(تغییر طول ضلع بزرگ‌تر)}+\Delta b\ \text{(تغییر طول ضلع کوچک)}}{C\ \text{(طول اولیه قطر)}}$$

$$\Rightarrow \Delta c=\frac{\frac{۲۳۰}{E}\times\cancel{۱۰}+\left(\frac{-۱۶۰}{E}\right)\times\cancel{۱۰}}{\cancel{۱۰}\sqrt{۲}}=\frac{۴۹/۴۹۷}{E}=۲/۴۷\times۱۰^{-۴}cm$$

مثال: (کنکور ارشد ۸۳): در شکل روبرو، جنس و سطح مقطع میله‌ها یکی است. دو میله مایل در A بهم اتصالی ندارند. در اثر افزایش درجه حرارت چه تنشی در میله‌ها به وجود می‌آید؟



۱) تنش ایجاد نمی‌شود
۲) در تمام میله‌ها تنش فشاری
۳) در میله‌های مایل کشش و در بقیه میله‌ها فشار
۴) در میله‌های مایل فشار و در بقیه میله‌ها کشش

حل از تحلیل سازه‌ها به خاطر داریم:

$$\text{درجه نامعینی}\ n=m+r-2j$$

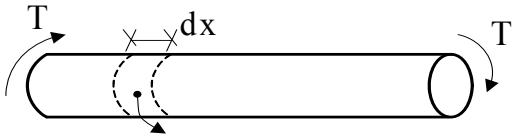
تعداد اعضا — قیدها — گره‌ها

$$n=۶+۰-۲\times۴=-۲$$

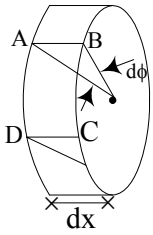
سازه فوق نامعین نیست. پس آزادانه تغییر شکل می‌دهد. گزینه ۱ درست است.

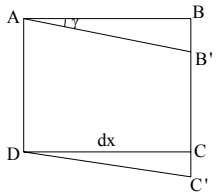
نکته: در سازه‌های معین، تغییرات درجه حرارت، نشست‌های تکیه‌گاهی و نقص ساخت اعضای سازه در سازه تنش ایجاد نمی‌کند.

- پیچش:



- یادآوری تعاریف:





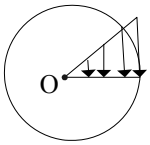
$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = Rd\phi$$

$$\gamma = \frac{\overline{BB'}}{dx} = R\frac{d\phi}{dx}$$

$$\tau = G\gamma = GR\frac{d\phi}{dx}$$

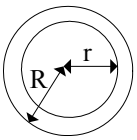
- تنش برش در مقطع تحت پیچش به صورت خطی تغییر می‌کند.

- در هر نقطه از مقطع دایروی داریم:



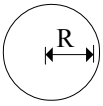
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

و از استاتیک به خاطر داریم:



$$J = \frac{\pi}{۲}\left(R^۴ - r^۴\right)$$

و

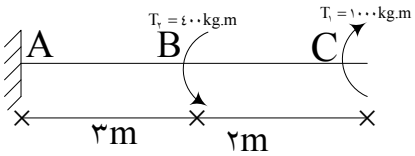


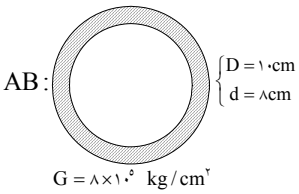
$$J = \frac{\pi R^۴}{۲}$$

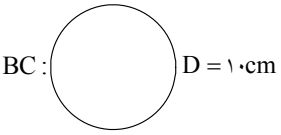
و میزان پیچش در هر نقطه از رابطه $\varphi = \int \frac{Tdx}{GJ}$ به دست می‌آید، که برای میله با سطح مقطع ثابت و لنگر ثابت داریم: $\varphi = \frac{TL}{GJ}$

- مقاومت دو مقطع تحت پیچش به نسبت عکس تنش‌هاست (با لنگرهای مساوی) و به نسبت لنگرهاست (با تنش‌های مساوی)

مثال: مطلوبست، محاسبه تنش برشی، ماکزیمم و دوران مقاطع B و C؟







حل: از تعادل لنگرها داریم: $T_A = ۶۰۰kgm$

$$\Rightarrow T_{AB} = ۶۰۰kgm \quad , \quad T_{BC} = ۱۰۰۰kgm$$

$$J_{AB} = \frac{\pi}{۲}\left(۵^۴ - ۴^۴\right) = ۵۷۹/۶cm^۴ \quad , \quad J_{BC} = \frac{\pi}{۲}\times ۵^۴ = ۹۸۱/۷cm^۴$$

$$\left.\begin{aligned}(\tau_{max})_{BC} &= \frac{TR}{J} = \frac{۶۰۰\times ۱۰۰\times ۵}{۵۷۹/۶} = ۵۱۷/۶kg/cm^۲\\ (\tau_{max})_{BC} &= \frac{TR}{J} = \frac{۱۰۰۰\times ۱۰۰\times ۵}{۹۸۱/۷} = ۵۰۹/۳kg/cm^۲\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_{max} = ۵۱۷/۶kg/cm^۲$$

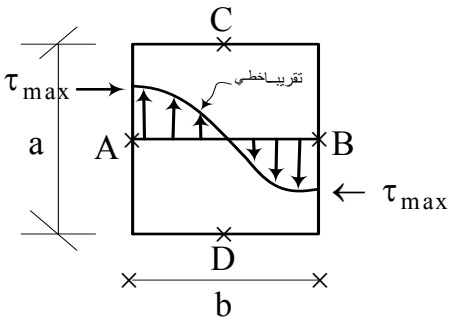
$$\phi_B = \phi_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ_{AB}} = \frac{۶۰۰\times ۱۰۰\times ۳۰۰}{۸\times ۱۰^۵ \times ۵۷۹/۶} = ۳۸۸\times ۱۰^{-۴}(rad)$$

$$\phi_{B/C} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GJ_{BC}} = \frac{۱۰۰۰\times ۱۰۰\times ۲۰۰}{۸\times ۱۰^۵ \times ۹۸۱/۷} = ۲۵۵\times ۱۰^{-۴}(rad) \Rightarrow \phi_C = \phi_B + \phi_{B/C} = \left(۳۸۸ + ۲۵۵\right)\times ۱۰^{-۴} = ۶۴۳\times ۱۰^{-۴}(rad)$$

- پیچش در مقطع مربع مستطیل:

تنش‌های برش در وسط اضلاع بزرگ‌تر، بیشترین مقدار را دارند

همچنین در ۵ نقطه مقطع (٤ گوشه و مرکز)، مقدار تنش، صفر است.

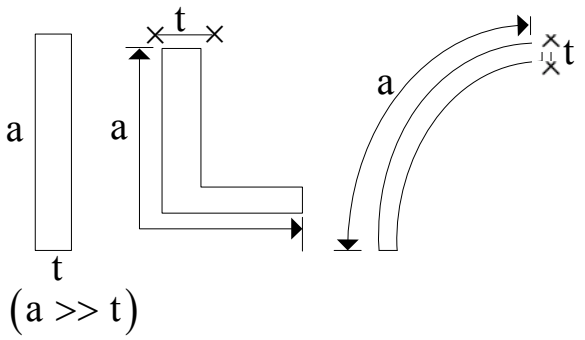


$$(\tau_{max})_{A,B} = \frac{T}{\alpha ab^۲}$$

$$(a > b)$$

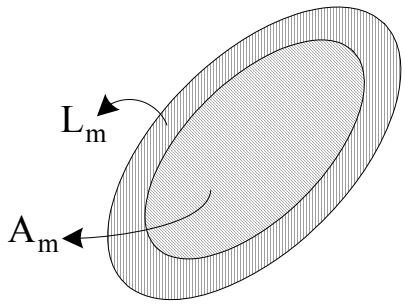
که α از جداول به دست می‌آید ولی مقدار آن به ازای مقادیر $\frac{a}{b}$ بزرگتر از ۱۰، ۱/۳ می»اشد. به عنوان مثال برای تمامی مقاطع روبرو داریم:

$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2} \quad , \quad J = \frac{1}{3}at^3$$



مقاطع روبرو، مقاطع جدار نازک باز محسوب می‌گردند.

- پیچش در مقاطع جدار نازک بسته:



$\tau = \frac{T}{2A_m.t}$ (t ضخامت مقطع)

و در هر نقطه از مقطع داریم: ثابت $= t \times T$

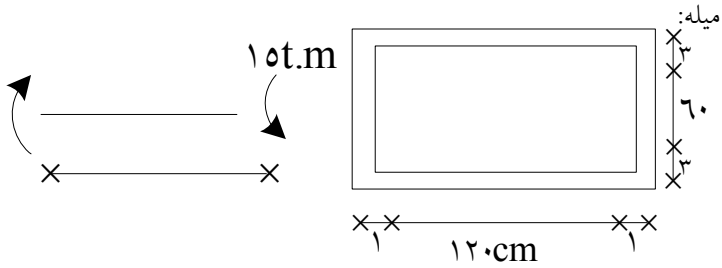
A_m: مساحت متوسط

L_m: محیط متوسط

پس با زیاد شدن ضخامت، تنش کاهش می‌یابد و بالعکس، در حالی که در مقاطع جدار نازک باز، با زیاد شدن ضخامت مقطع، تنش افزایش می‌یابد و بالعکس.

$$\rightarrow J_t = \frac{4Am^2t}{L_m} \text{ ثابت اگر } \phi = \int \frac{Tdx}{GJ_t} \quad , \quad J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} \rightarrow t =$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ تنش در مقطع و زاویهٔ پیچیدگی میله:



$$\left(G = 8 \times 10^5 kg/cm^2\right)$$

حل

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \quad , \quad A_m = 121 \times 63 = 7623 cm^2$$

$$\tau_1 = \frac{10 \times 10^5}{2 \times 7623 \times 1} = 65/60 kg/cm^2 \text{ (جدار قائم)}$$

$$\tau_2 = \frac{10 \times 10^5}{2 \times 7623 \times 3} = 21/86 kg/cm^2 \text{ (جدار افقی)}$$

$$J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad , \quad \oint \frac{ds}{t} = 2\left(\oint_0^{121} \frac{ds}{3} + \oint_0^{63} \frac{ds}{1}\right) = 206/7 \Rightarrow J_t = \frac{4 \times 121^2 \times 63^2}{206/7} = 1012 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ_t} = \frac{10^6 \times 300}{8 \times 10^5 \times 1012 \times 10^6} = 335 \times 10^{-6} (rad)$$

نکته: اگر سطح مقطع مدور باشد (دایره یا حلقه)، پس از پیچش هم مسطح باقی می‌ماند ولی در سایر مقاطع، پس از پیچش، تاب خوردگی یا طبله کردن (Warping) خواهیم داشت.

نکته: مقاطع جدار نازک بسته، در پیچش به مراتب قوی‌تر از مقاطع جدار نازک باز می‌باشند و کلاً بهینه‌ترین مقطع برای تحمل پیچش مقطع حلقوی است.