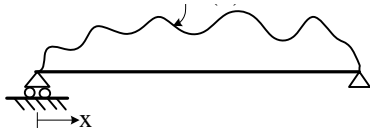
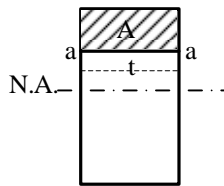


## بارگذاری عرضی:



بارگذاری عرضی در تیرها باعث ایجاد تنش برشی می شود که مقدار آن از رابطه زیر قابل محاسبه است:



$$(\tau)_{a-a} = \frac{VQ_A}{It}$$

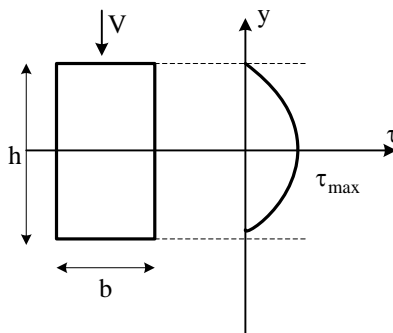
که در این رابطه:  $V$  - برش در مقطع مورد نظر در طول تیر

$Q_A$ : ممان استاتیکی اول قسمت هاشور خورده (A)

$I$ : ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی

$t$ : پهنای مقطع در محل محاسبه تنش برشی

در مقطع مستطیل داریم:



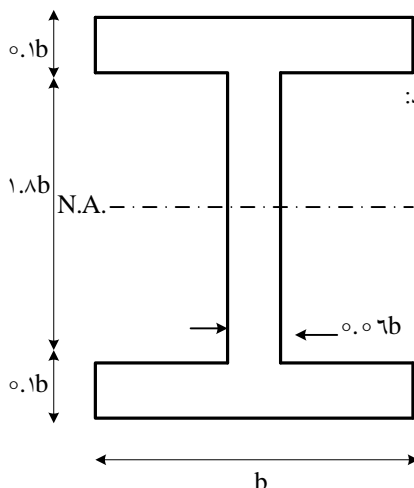
$$\tau = \frac{VQ}{It} = V \cdot \frac{\frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6V}{bh^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \tau|_{y=0} = \frac{\sigma v}{bh^3} \cdot \frac{h^3}{6} = \frac{3}{2} \frac{v}{bh}$$

پس اگر  $\tau_{ave} = \frac{V}{A} = \frac{V}{bh}$  باشد، ملاحظه می شود تنش برشی ماکزیمم در مقطع مستطیل ۱/۵ برابر تنش برشی میانگین می باشد. برخلاف

خمش (ناشی از خمش خالص)، مقدار تنش برشی روی محور خنثی ماکزیمم و در تارهای بالا و پایین مقطع صفر می باشد.

در مقاطع I شکل سهم بال ها در تحمل برش بسیار ناچیز است و عملاً جان اکثر برش وارده به تیر را تحمل می کند. بهمین دلیل در محاسبات عملی، فقط جان را در برابر برش در نظر می گیرند.



مثال) مقدار  $\tau_{\max}$  و مقدار نیروی قابل تحمل توسط جان را در مقطع روبرو به دست آورید:



$$I = \frac{b(2b)^3}{12} - \frac{(b - 0.6b)(1.8b)^3}{12} \approx 0.21b^4$$

A diagram showing a T-junction. A shaded T-shaped region is shown, with a horizontal bar at the top and a vertical stem extending downwards. A dashed line, labeled 'A' at its left end, is positioned below the vertical stem of the T-shape.

برای محاسبه نیروی قابل تحمل توسط جان ( $V_w$ ) داریم:

$$= \frac{V}{I} \int_{-\cdot/\mathfrak{A}b}^{\cdot/\mathfrak{A}b} \left[ (\cdot/\mathfrak{A}\Delta b^{\mathfrak{r}}) + \cdot/\cdot \mathfrak{F}b(\cdot/\mathfrak{A}b - y) \left( \frac{y + \cdot/\mathfrak{A}b}{\mathfrak{r}} \right) \right] dy \Rightarrow$$

$$V_W = \frac{V}{I} \cdot [\mathfrak{r}\mathfrak{r}\Delta b^{\mathfrak{r}} y - \cdot/\cdot \mathfrak{I}by^{\mathfrak{r}}] \Big|_{-\cdot/\mathfrak{A}b}^{\cdot/\mathfrak{A}b} = \frac{V}{\cdot/\mathfrak{r}\mathfrak{I}b^{\mathfrak{r}}} \times \cdot/\mathfrak{r} \cdot b^{\mathfrak{r}} = \cdot/\mathfrak{A}\Delta V$$

مثال

A cartoon illustration of a person with a large pencil on their back, symbolizing the concept of an example or illustration.

A diagram of a simply supported beam of length  $l$  under a uniform load  $q$ . The beam is represented by a horizontal line with a pin support at the left end and a roller support at the right end. A downward-pointing arrow labeled  $q$  is positioned above the center of the beam, indicating the load. A double-headed arrow below the beam indicates the total length  $l$ .

$$M_{\max} = \frac{ql^r}{\lambda} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{\frac{ql^r}{\lambda}}{\frac{bh^r}{\varepsilon}} = \frac{r}{r} \frac{ql^r}{bh^r}$$

$$V_{\max} = \frac{ql}{r} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{r}{r} \frac{V_{\max}}{bh} = \frac{r}{r} \frac{ql}{r} \cdot \frac{1}{bh} = \frac{r}{r} \frac{ql}{bh}$$

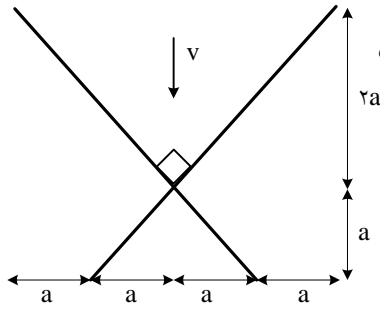
$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{1}{h}$$

2



مثال (کنکور ارشد ۸۴): مقطع تیری فلزی از ورق با ضخامت نازک  $t$  ساخته شده است

بر اثر برش  $V$ ، حداکثر تنش در ورق ها چقدر است؟



(۴)  $\frac{V}{3\sqrt{2}at}$

(۳)  $\frac{V}{4at}$

(۲)  $\frac{V}{4\sqrt{2}at}$

(۱)  $\frac{V}{6at}$

گزینه ۲ صحیح است.



هر ورق نصف نیروی  $V$  را تحمل می کند. و می دانیم که برش

ماکزیمم در وسط مقطع مستطیلی اتفاق می افتد پس:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \times \frac{V}{\sqrt{2}a \times t} = \frac{V}{4\sqrt{2}at}$$

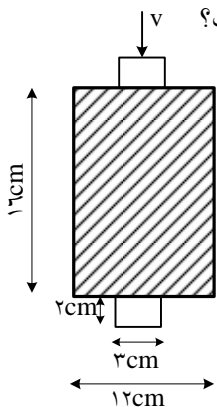


نکته: اگر مقطع تیر از دو ماده ساخته شده باشد می توان مثل حالت تحت خمش، مقطع را به مقطع معادل از یک جنس تبدیل نموده و برای این مقطع  $Q$  و  $I$  را به دست آورد. ولی به خاطر داشته باشید که حتما برای پهنای تیر ( $t$ ) از پهنای واقعی (و نه تبدیل یافته) باید استفاده نمود.



مثال (کنکور ارشد ۷۹): مقطع مختلط از چوب و فلز مطابق شکل مفروض است. اگر دو قطعه فلز  $2 \times 3 \text{ cm}$  در بالا و پایین چوب

توسط چسب در تمام طول تماس خود به چوب متصل شده باشند، تنش چسب ناشی از برش  $V = 4 \text{ ton}$  چقدر است؟

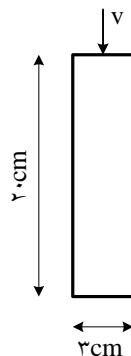


(۴)

(۳)  $2/25 \text{ kg/cm}^2$

(۲)  $9 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

(۱)  $36 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$



مقطع را تبدیل می کنیم به مقطع معادل فلزی:

$$\Rightarrow I = \frac{3 \times 2^3}{12} = 200 \text{ cm}^4$$

$$Q = 2 \times 3 \times (10 + 1) = 54 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{VQ}{It} = \frac{4000 \times 54}{2000 \times 3} = 36 \text{ kg/cm}^2$$

گزینه ۱ صحیح است.



مثال (کنکور ارشد ۷۹): مقطع جدار نازک شکل زیر در نقطه  $C$  باز می باشد.

ضخامت جدار ثابت است. نیروی برش در امتداد محور  $y$  می باشد و از مرکز برش عبور

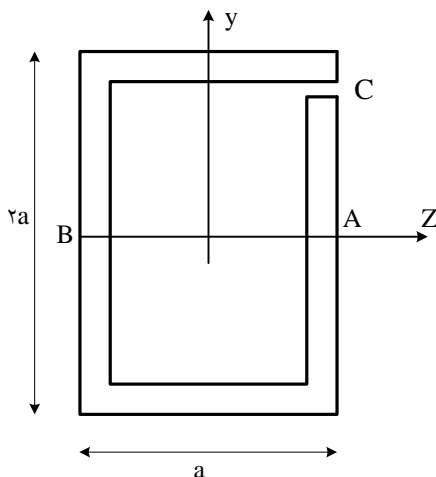
می کند. نسبت تنش های برشی در نقاط  $A$  و  $B$  چقدر است؟  $\left( \frac{\tau_A}{\tau_B} \right)$

(۴)  $\frac{1}{3}$

(۳) ۱

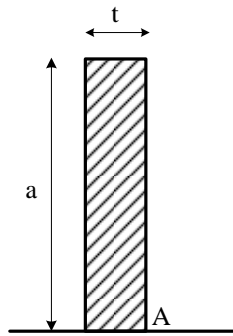
(۲)  $-\frac{1}{3}$

(۱) -۱

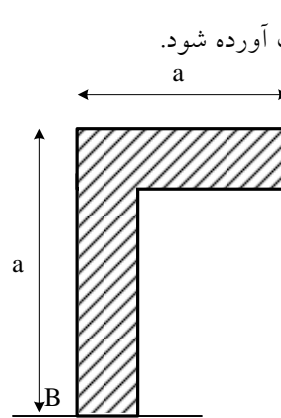


کافی است که نسبت  $\frac{VQ}{It}$  ها را محاسبه کنیم ولی از آنجا که  $V$  و  $I$  و  $t$  ثابت می باشند





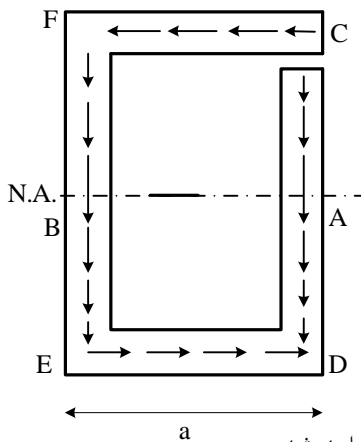
$$Q_A = a \cdot t \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} a^2 t$$



$$Q_B = a \cdot t \cdot a + a \cdot t \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{2} a^2 t$$

کافی است نسبت  $\frac{Q_A}{Q_B}$  به دست آورده شود.

و اگر نیروی برش قائم به سمت پایین باشد، تنش برشی در A به سمت پایین و در B هم به سمت پایین می باشد پس  $\frac{\tau_A}{\tau_B} = +\frac{1}{3}$  گزینه ۴ صحیح است.



نکته: در مقطع مقابل ابتدا تنش از C به صورت سهمی تا A تغییر می کند (در A ماکزیمم است) سپس به صورت سهمی نزول پیدا می کند تا در D صفر می شود. در شاخه دیگر مقطع هم تنش از C به صورت خطی افزایش می یابد تا به مقدار خود در F برسد سپس به صورت سهمی افزایش می یابد تا در B به مقدار ماکزیمم تنش برشی در مقطع برسیم. از B تا E هم به صورت خطی کاهش می یابد تا در D به صفر برسد.

### مرکز برش:

نقطه ای است در داخل یا خارج مقطع که اگر برش به آن نقطه وارد شود، مقطع دچار پیچش نخواهد شد.

نکته: - اگر جسم دارای دو محور تقارن باشد، مرکز برش همان مرکز تقارن خواهد بود.

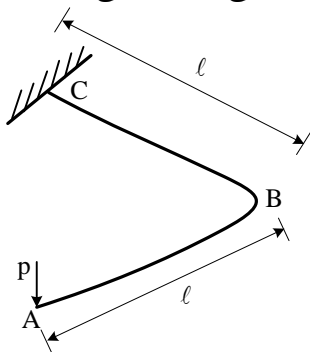
- اگر جسم دارای یک محور تقارن باشد، مرکز برش بر روی آن محور و معمولاً در محل تقاطع اعضاء مقاطع خواهد بود.

- برای تشخیص موقعیت مرکز برش، کافی است با توجه به روند کاهش یا

افزایش Q جهت تنش ها روی اعضای مقطع مشخص شود.

سپس باید تعیین نمود که مرکز برش باید در سمت چپ یا راست و یا داخل مقطع باشد

تا این نیروها بتوانند همدیگر را خنثی کنند.



مثال) در سازه شکل روبه رو که در صفحه xoy قرار دارد بار P در راستای Z در نقطه A به

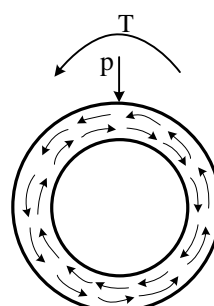
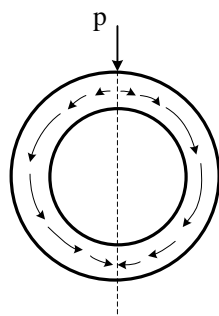
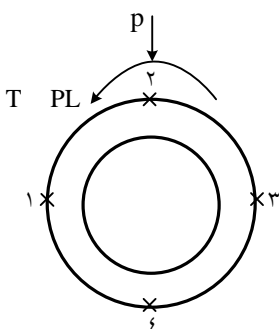
آن اعمال می شود اگر مقطع جسم لوله باشد، مشخص کنید مقدار ماکزیمم تنش برشی در

مقطع چقدر است؟ (شعاع = r و ضخامت = t)

✓ حل) مقدار ماکزیمم تنش برشی در C

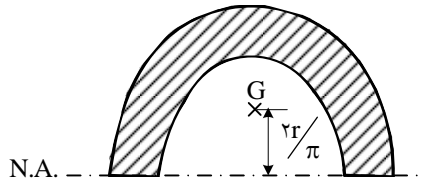
(تکیه گاه) رخ می دهد زیرا در آنجا هم برش

و هم پیچش داریم:





همان طور که از اشکال بر می آید، تنش برشی حداکثر، در نقطه ۱ روی می دهد، زیرا تنش های برشی ناشی از V و T در نقطه ۱ با هم، هم جهت هستند. (تنش برشی ناشی از پیچش در کل مقطع یکسان و ثابت است ولی تنش برشی ناشی از V بر روی محور خنثی ماکزیمم است.)



$$\tau_T = \frac{T}{\tau A_{mt}} = \frac{PL}{\tau \pi r^2 t}$$

$$\tau_V = \frac{VQ_{max}}{It'} = \frac{P \times \frac{1}{2} \times \pi r t \times \frac{\tau r}{\pi}}{\left(\pi r^3 t\right)(\tau t)} = \frac{P}{\pi r t}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \tau_V + \tau_T = \frac{P}{\pi r t} + \frac{PL}{\tau \pi r^2 t}$$



نکته: - در مقطع مستطیل داشتیم (تحت برش خالص):

- در مقطع حلقوی به دست آوردیم:

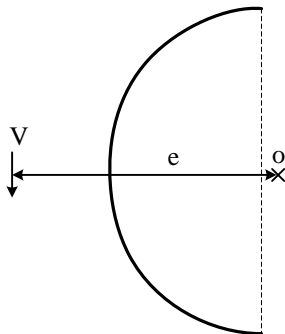
- در مقطع دایروی داریم: (به قطر r)

- در مقطع قوطی (مربع) داریم (به ضلع a و ضخامت t)

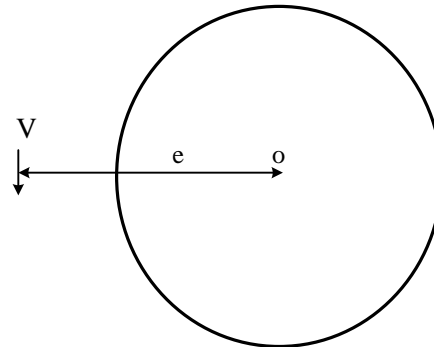
\* بهتر است فرمول های فوق به خاطر سپرده شود\*



نکته: موقعیت مرکز برش مقاطع زیر را به خاطر بسپارید:



$$e = \frac{4r}{\pi}$$



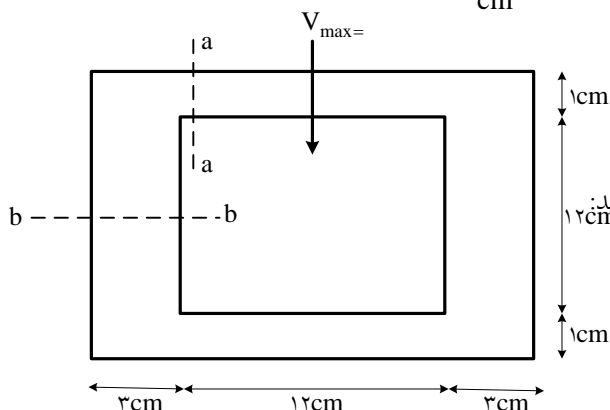
$$e = 2r$$

نکته: تنش برش ماکزیمم در مقاطع مثلثی و لوزی روی محور خنثی اتفاق نمی افتد و باید رابطه  $\frac{dQ}{dt} = 0$  ارضا شود تا موقعیت محل بش ماکزیمم به دست بیاید.



مثال (کنکور ارشد ۸۱): در مقطع شکل مقابل چنانچه تنش برش مجاز مصالح  $960 \frac{kg}{cm^2}$  باشد ظرفیت برش قائم برحسب ton

کدام است؟



۵۸/۸ (۲)

۴۸/۱ (۱)

۱۱۸/۲ (۴)

۶۱/۵ (۳)



حل از آنجا که ضخامت ثابت نیست باید دو مقطع برای تنش مجاز چک شوند: مقطع a-a (چون ضخامت کمتری دارد) و مقطع b-b (چون Q بیشتری دارد)



$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{Q}{t}\right)_{a-a} &= \frac{6 \times 1 \times 6 / 5}{1} = 39 \text{ cm}^2 \\ \left(\frac{Q}{I}\right)_{b-b} &= \frac{6 \times 1 \times 6 / 5 + 7 \times 3 \times 3 / 5}{3} = 37 / 5 \text{ cm}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{Q}{t}\right)_{\max} = 39 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (18 \times 14^3 - 12 \times 12^3) = 2388 \text{ cm}^4 \Rightarrow \tau = \tau_{\text{all}} = 960 = \frac{VQ}{It} = \frac{V \times 39}{2388} \Rightarrow V_{\text{all}} = 58 / 8$$

\* به ازای  $\left(\frac{Q}{t}\right)_{\max}$  مقدار  $V$  می نیمم خواهد شد.



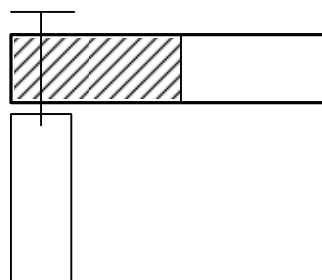
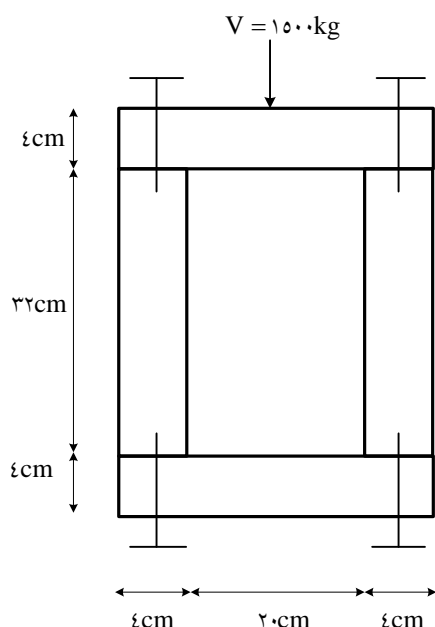
مثال) در تیری با مقطع روبه رو، اگر نیروی برشی مجاز هر میخ 250kg باشد.

حداکثر فاصله بین میخ ها چقدر می تواند باشد؟

✓ حل در این گونه مسائل ابتدا باید تشخیص داد، هر میخ چه  $Q$  ای را تحمل می کند

سپس با محاسبه  $Q$  و از روی آن شاربرشی ( $q$ )، مقدار فاصله مجاز میخ (یا پیچ)

به دست می آید: در این مسأله هر میخ باید نصف  $Q$  الوار بالایی (یا پایینی) را تحمل می کند.



$$\Rightarrow Q = \left(4 + \frac{20}{2}\right) \times \left(\frac{32}{2} + \frac{4}{2}\right) = 252 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{1}{12} (28 \times 40^3 - 20 \times 32^3) = 94720 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow q = \tau \frac{VQ}{I} = \frac{1500 \times 252}{94720} = 4 \text{ kg/cm}$$

$$\Rightarrow q \times \text{فاصله مجاز میخ ها} = F_{\text{all}} \Rightarrow \text{فاصله مجاز میخ ها} = \frac{250}{4} = 62 / 5 \text{ cm}$$