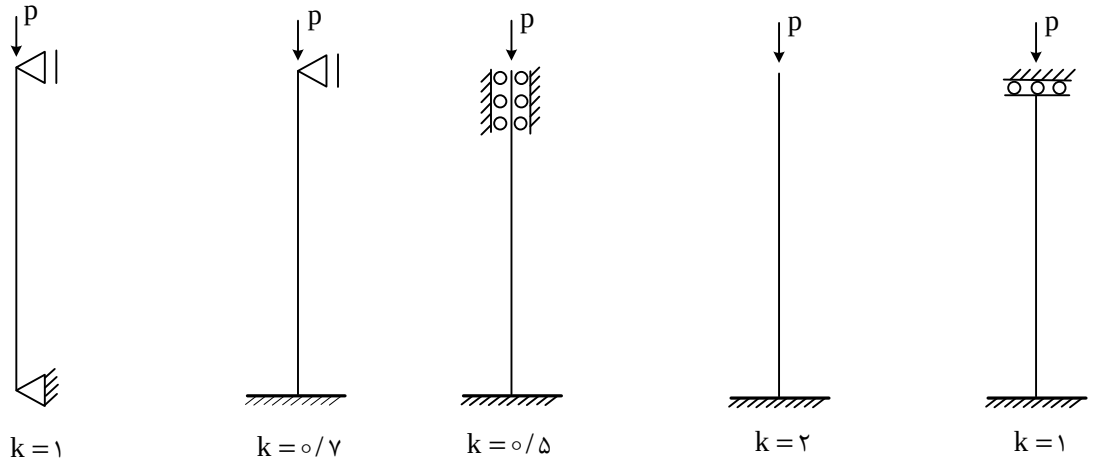
ناپایداری سازه‌ها- کمانش:

در اعضای فشاری (مثل ستون‌ها)، اگر بار از حدی بیشتر شود، عضو باربری خود را از دست داده و عملاً دیگر نمی‌تواند باری را تحمل کند به این بار حدی بار بحرانی یا P_{cr} می‌گویند.

بار بحرانی در ستون‌های ارتجاعی برابر است با:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2}$$

که در این رابطه EI صلبیت خمشی، l طول عضو و k ضریب طول موثر است که تابعی است از شرایط تکیه‌گاهی دو سر عضو. اشکال زیر را حتماً به خاطر بسپارید: (همه میله‌ها دارای طول l و صلبیت EI می‌باشند)



با توجه به اشکال فهمیده می‌شود که، هر چه دو سر ستون نسبت به حرکت جانبی مقیدتر باشند، k عددی کوچکتر و در نتیجه بار بحرانی ستون عددی بزرگتر خواهد بود. در وضعیت‌های موجود، ستون طره کمترین و ستون دو سر گیردار بیشترین بار بحرانی را دارا می‌باشند.

اگر نسبت $\left(\frac{kl}{r}\right)$ را ضریب لاغری عضو بنامیم، تنش متناظر بار بحرانی را به صورت زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

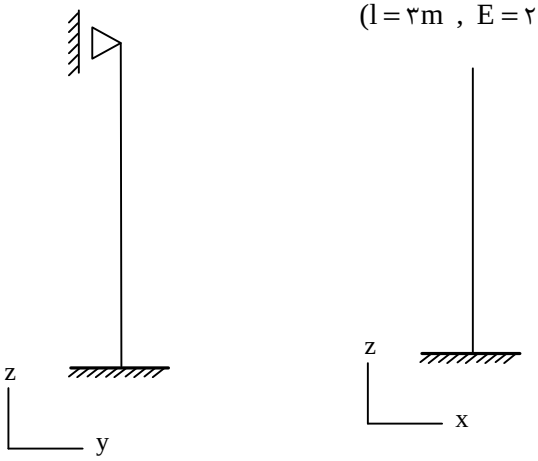
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A(kl)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{kl}{r}\right)^2}$$

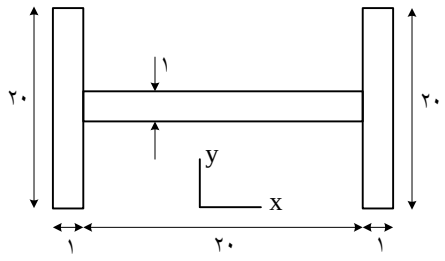
(r: شعاع ژیراسیون مقطع = $\sqrt{\frac{I}{A}}$)

با توجه به موارد فوق می‌توان نتیجه گرفت که باربری یک عضو فشاری تابعی است از مشخصات مادی (E)، مشخصات هندسی مقطع و (r,I)، طول عضو (l) و شرایط تکیه گاهی دو سر عضو (k).

- هرچه مصالح مقطع، از مرکز مقطع دورتر چیده شوند، مقطع دارای شعاع ژیراسیون بالاتر و باربری بیشتری خواهد بود. به عنوان مثال مقاطع لوله و قوطی، مقاطع به مراتب پر بازده‌تری نسبت به مقاطع توپر مثل دایره و مستطیل، در ستون‌ها می‌باشند. (البته با مساحت‌های مساوی)

مثال) بار بحرانی ستون زیر را به دست آورید: $(l = ۳m \ , \ E = ۲\times۱۰^{۶}\frac{kg}{cm^{۲}})$





حل همان‌طور که در شکل دیده می‌شود شرایط انتهایی دو سر عضو در راستاهای x و y با هم متفاوت است:

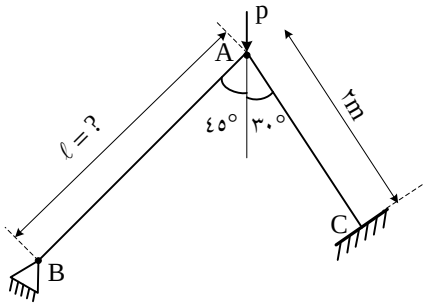
$k_y = ۲$ (خمش در راستای y) $\qquad k_x = ۰/۷$ (خمش در راستای محور x)

$$I_x = \frac{۱}{۱۲}\left(۲\times۱\times۲۰^{۳} + ۲۰\times۱^{۳}\right) = ۱۳۳۵ \ cm^{۴}$$

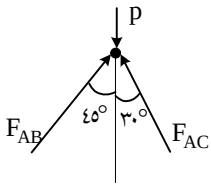
$$I_y = \frac{۱}{۱۲}(۲۰\times۲۲^{۳} - ۱۹\times۲۰^{۳}) = ۵۰۸۰ \ cm^{۴}$$

$$P_{cr} = \min\begin{cases}(P_{cr})_x = \dfrac{\pi^{۲}EI_x}{(k_x l)^{۲}} = \dfrac{\pi^{۲}\times۲\times۱۰^{۶}\times۱۳۳۵}{(۰/۷\times۳۰۰)^{۲}} = ۵۹۷/۵ \ ton \\ (P_{cr})_y = \dfrac{\pi^{۲}EI_y}{(k_y l)^{۲}} = \dfrac{\pi^{۲}\times۲\times۱۰^{۶}\times۵۰۸۰}{(۲\times۳۰۰)^{۲}} = ۲۷۸/۵ \ ton\end{cases} \Rightarrow P_{cr} = ۲۷۸/۵ \ ton$$

مثال) برای این که بار P ماکزیمم شود، طول l چقدر باید باشد: (EI ثابت است).



حل از تعادل نیروها در گره A داریم:



$$\sum F_x = ۰ \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}F_{AB} = \frac{۱}{۲}F_{AC} \Rightarrow F_{AC} = \sqrt{۲}F_{AB}$$

$$\sum F_y = ۰ \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}F_{AB} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}F_{AC} = P \Rightarrow F_{AB} = ۰/۵۲P \quad F_{AC} = ۰/۷۳P$$

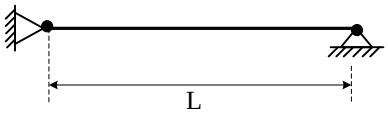
برای این که بار P ماکزیمم مقدار را بتواند اختیار کند باید بار کمانش هر دو میله یکسان باشد (با افزایش P هر دو با هم شروع به کمانش کنند)

$$\Rightarrow F_{AB} = (P_{cr})_{AB} \Rightarrow ۰/۵۲P = \frac{\pi^{۲}EI}{l^{۲}} \rightarrow P = \frac{\pi^{۲}EI}{(۰/۵۲)l^{۲}} \qquad (۱)$$

$$F_{AC} = (p_{cr})_{AC} \Rightarrow ۰/۷۳p = \frac{\pi^{۲}EI}{(۰/۷\times۲)^{۲}} \rightarrow P = \frac{\pi^{۲}EI}{۱/۴۳} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\pi^{۲}EI}{۰/۵۲l^{۲}} = \frac{\pi^{۲}EI}{۱/۴۳} \Rightarrow l = ۱/۶۶ \ m$$

مثال) (کنکور ارشد ۸۱): مقدار تغییر درجه حرارتی (ΔT) که قادر است ستون دو سر مفصلی به طول L و ضریب انبساط حرارتی α را به حد کمانش برساند کدام است؟



۱) $\frac{\pi^2 EI}{\alpha l^2}$ ۲) $\frac{2\pi^2 I}{A\alpha L^2}$ ۳) $\frac{\pi^2 I}{A\alpha L^2}$ ۴) $\frac{\pi^2 I}{2A\alpha L^2}$

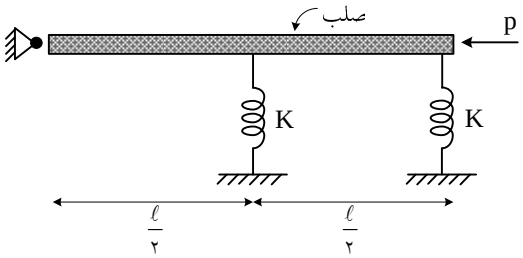
حل سازه نامعین است و با افزایش درجه حرارت، در آن نیرو و تنش می‌افتد. با افزایش درجه حرارت به میزان ΔT داریم:

$\Delta l = \alpha l \Delta T \Rightarrow$ عکس‌المعل افقی تکیه گاه‌ها $R = AE\varepsilon = AE\frac{\Delta l}{l} = AE\frac{\alpha l \Delta T}{l} = AE\alpha\Delta T$

$R = R_{cr}:\ A\cancel{E}\alpha\Delta T = \frac{\pi^2 \cancel{E} I}{l^2} \rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 I}{A\alpha l^2}$

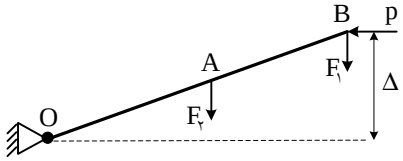
گزینه ۳ صحیح است.

مثال) (کنکور ارشد ۷۴): بار بحرانی شکل مقابل چقدر است؟



۱) kl ۲) $\frac{5kl}{4}$ ۳) $\frac{3kl}{4}$ ۴) ∞

حل اگر مطابق شکل، فرض کنیم، نقطه B بر اثر اعمال بار P جابجایی جانبی Δ به سمت بالا (یا پایین) داشته باشد داریم:



$F_1 = 2F_2 = k\Delta$

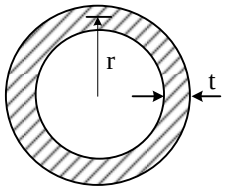
$\sum M_o = 0 \Rightarrow F_1(l) + F_2\left(\frac{l}{2}\right) = P.\Delta$

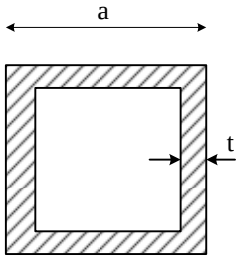
$\Rightarrow k\cancel{\Delta}l + k\frac{\cancel{\Delta}}{2}.\frac{l}{2} = p\cancel{\Delta} \Rightarrow p_{cr} = \frac{5kl}{4}$

یعنی اگر بار p کمتر از این مقدار باشد، سازه دارای تعادل پایدار بوده و پس از هر تغییر شکلی به حالت اول خود باز می‌گردد ولی اگر بار بیشتر از مقدار فوق باشد تعادل ناپایدار خواهد بود و سازه به حالت اول خود باز نخواهد گشت.

مثال) مطلوبست مقایسه دو مقطع لوله و قوطی در کمانش (با ضخامت و مساحت مساوی)

$A_{\text{لوله}} = A_{\text{قوطی}} \Rightarrow 2\pi rt = 4at \Rightarrow a = \frac{\pi r}{2}$





$\frac{(P_{cr})_{\text{لوله}}}{(P_{cr})_{\text{قوطی}}} = \frac{I_{\text{لوله}}}{I_{\text{قوطی}}} = \frac{\pi r^3 \cancel{t}}{\frac{2}{3}a^3\cancel{t}} = \frac{\pi r^3}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\pi r}{2}\right)^3} = \frac{\pi \cancel{r^3}}{\frac{2}{3}\times\frac{\pi^3 \cancel{r^3}}{8}} = 1/22$

روش‌های انرژی:

در حالت کلی، انرژی کرنش در واحد حجم برابر است با:

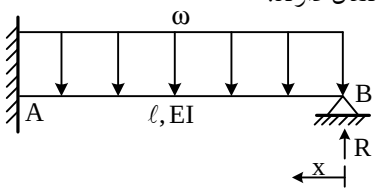
$$U=\frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)\right]+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)$$

– انرژی، در سازه‌ای که n عضو دارد و تحت بار محوری N، لنگر خمشی M، نیروی برشی V و لنگر پیچشی T قرار دارد عبارتست از:

$$U=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{li}\frac{N^2dx}{2EA}+\int_{li}\frac{M^2dx}{2EI}+\int_{li}\frac{f_sV_s^2dx}{2GA}+\int_{li}\frac{T^2dx}{2GJ}\right]$$

– قضیه حداقل کار: اگر انرژی سازه بر حسب یک مجهول (مثلاً یک قید تکیه‌گاهی، نوشته شود، مقدار آن مجهول از می‌نیمم کردن انرژی سازه به دست می‌آید. به عنوان مثال در سازه‌ای که فقط خمش داریم، مقدار X_i (مجهول مسأله) از رابطه: $\sum_{i=1}^{n}\int_{li}\frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial X_i}\right)dx}{EI}=0$ تعیین می‌شود.

– انرژی کرنش اجسام صلب صفر است، چون هیچ گونه تغییر شکل کرنشی ندارند و فقط دوران و انتقال دارند.



مثال) عکس‌العمل تکیه‌گاه B را به دست آورید:

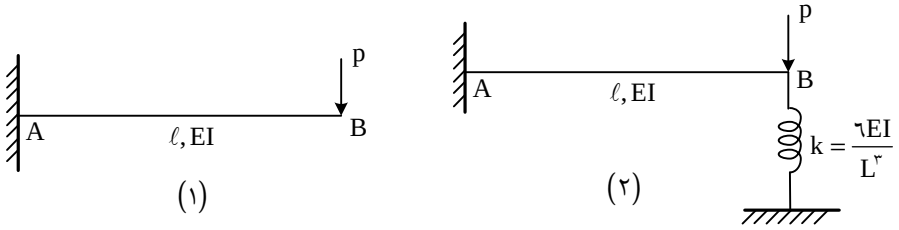
حل اگر عکس‌العمل تیکه‌گاه B را R فرض کنیم ولنگر را بر حسب آن بنویسیم، خواهیم داشت:

$$M(x)=Rx-\frac{\omega x^2}{2}$$

طبق قضیه حداقل کار:

$$\int_0^l\frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial R}\right)dx}{EI}=0\rightarrow\int_0^l\frac{\left(Rx-\frac{\omega x^2}{2}\right)(x)dx}{EI}=0\Rightarrow\left(R\frac{l^3}{3}-\frac{\omega}{2}\frac{l^4}{4}\right)=0\rightarrow R=\frac{3}{8}\omega l$$

مثال) انرژی کرنشی دو تیر زیر را با هم مقایسه نمائید:



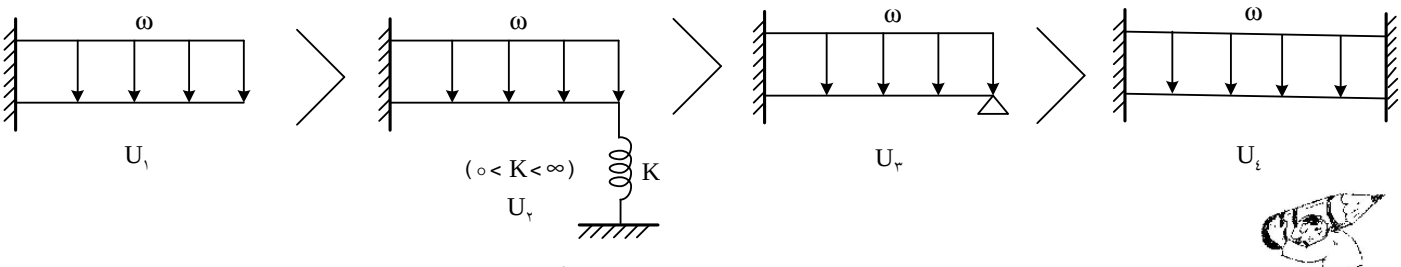
حل در تیر دوم نیروی P به نسبت سختی تیر (در نقطه B) و سختی فنر بینشان تقسیم می‌شود ('P سهم‌تیر و "P سهم فنر)

$$U_1=\frac{1}{2}P(\Delta_B)^2=\frac{1}{2}P.\frac{Pl^3}{3EI}=\frac{P^2l^3}{6EI}\qquad U_2=\frac{1}{2}P'(\Delta_B)^2+\frac{1}{2}P''(\Delta_{\text{فنر}})^2$$

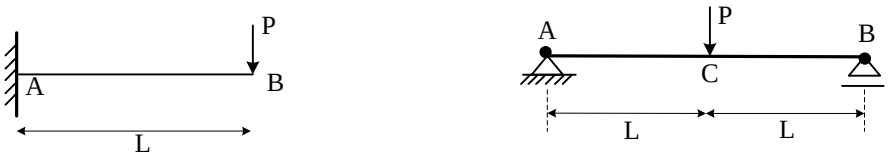
$$P'=\frac{\text{سختی تیر(در نقطهB)}\times P}{\text{مجموع سختی تیر و سختی فنر}}=\frac{\frac{3EI}{l^3}}{\frac{3EI}{l^3}+k}\times P=\frac{3EI}{3EI+6EI}\times P=\frac{P}{3}\Rightarrow P''=\frac{2P}{3}$$

$$\Rightarrow U_2=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{3}\right)\left(\frac{\left(\frac{P}{3}\right)l^3}{3EI}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2P}{3}\right)\left(\frac{\frac{2P}{3}}{\frac{6EI}{l^3}}\right)=\frac{P^2l^3}{18EI}\Rightarrow\frac{U_1}{U_2}=3$$

– همان‌طور که در مثال قبل هم مشاهده می‌شود، هرچه سازه مقیدتر باشد (عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بیشتری داشته باشد) انرژی موجود در آن کمتر خواهد بود. به عنوان مثال ترتیب انرژی در تیرهای زیر را در نظر بگیرید (EI, l برای همه اعضاء یکسان است.)



مثال) (کنکور ارشد ۸۲): سطح مقطع و جنس تیرهای زیر یکسان می‌باشد. اگر انرژی کرنشی ذخیره شده در شکل (الف) مساوی U باشد انرژی کرنش شکل (ب) چقدر است؟



(الف) (ب)

۱) U ۲) 2U ۳) $\frac{U}{2}$ ٤) 4U

حل

$$\left.\begin{array}{l}(\text{الف}):\ U=\frac{1}{2}P(\Delta_B)^2=\frac{1}{2}P\left(\frac{pl^3}{3EI}\right)=\frac{p^2l^3}{6EI}\\(\text{ب}):\ U=\frac{1}{2}P(\Delta_C)^2=\frac{1}{2}P\left(\frac{p(2l)^3}{48EI}\right)=\frac{P^2l^3}{12EI}\end{array}\right\}\Rightarrow U_{\text{ب}}=\frac{1}{2}U$$

گزینه ۳ صحیح است.