



ریاضی ۱ و ۲

تابع

تعریف تابع: متغیر y را تابعی از متغیر x در حوزه تعریف D گویند اگر به ازای هر x از این حوزه یا دامنه مقدار معینی برای متغیر y متناظر باشد. یا برای هر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) داشته باشیم $(y_1 = y_2)$

روش‌های نمایش توابع:

۱- ضابطه تحلیلی، $y=f(x)$

مثال: $y=x^2+2\log x$

۲- ضابطه ضمنی $f(x,y)=0$

مثال: $y\cos x + x^2 \ln y = 2$

نکته: در هر صورت نمایش تابع، باید تعریف آن صادق باشد.

دامنه تابع: مجموعه تمام x هایی که در معادله تابع صدق کنند را دامنه تابع گفته و با D_f نمایش می‌دهند.

برد تابع: مجموعه تمام y هایی که در معادله تابع صدق کند را برد تابع گفته و با R_f نمایش می‌دهند.

انواع تابع

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

۱- تابع یک به یک:

$$f: X \rightarrow Y \Rightarrow Y=R_f$$

۲- تابع پوشا:

$$\forall x \in D_f \Rightarrow f(x+T)=f(x) \text{ و دوره تناوب } T$$

۳- تابع متناوب:

نکته: دوره تناوب تابع $f(ax)$ در صورت متناوب بودن f با دوره T ، برابر $\frac{T}{|a|}$ می‌باشد.

۴- تابع زوج: تابع متقارن نسبت به محور y ها یا $f(-x)=f(x)$

۵- تابع فرد: تابع متقارن نسبت به مرکز یا $f(-x)=-f(x)$

۶- تابع صعودی و اکیدا صعودی:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1 \text{ و } x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \geq y_1 \text{ تابع صعودی:}$$

۷- تابع نزولی و اکیدا نزولی:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1 \text{ و } x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \leq y_1 \text{ تابع نزولی:}$$

معرفی برخی توابع خاص:

$$y=[x]=n \quad ; \quad n \leq x \leq n+1$$

- تابع جزء صحیح:

$$y=a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

- تابع نمایی:

$$y=\log_a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

- تابع لگاریتمی:



$$y = \sin x$$

- تابع سینوس:

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{و} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{و} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$y = \cos x$$

- تابع کسینوس:

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{و} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{و} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$y = \tan x, \quad x \neq (2n-1)\frac{\pi}{2}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

- تابع تانژانت:

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \text{و} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{و} \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$y = \cot x \quad \text{و} \quad x \neq n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}$$

- تابع کتانژانت:



توجه: همانطور که دیده شد دوره تناوب تابع سینوس و کسینوس، 2π و دوره تناوب تانژانت و کتانژانت π می باشد.

روابط مثلثاتی مهم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}, \quad \cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \pm 1}{\cot a \mp \cot b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, \quad \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}, \quad \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\sec^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a, \quad \csc^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} = 1 + \cot^2 a$$

$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

توابع معکوس و معکوس توابع

$$f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$$

در تابع $f: D_f \rightarrow R_f$ با ضابطه $y=f(x)$ معکوس تابع، رابطه روبرو است:

اگر تابعی بخواهد معکوس پذیر باشد باید حتما یک به یک باشد.

توابع مثلثاتی معکوس:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x$$

نکات: $\text{Arcsin } x$ تابعی صعودی و فرد و $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin } x \leq \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{Arccos } x$$

$\text{Arccos } x$ نزولی و تابعی نه زوج و نه فرد است. $0 \leq \text{Arccos } x \leq \pi$



$$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{Arctg} x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arctg} x \leq \frac{\pi}{2} \text{ و } \operatorname{Arctg} x \text{ صعودی و فرد است}$$

برخی روابط:

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x, \quad \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\operatorname{Arccos} x) = x, \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

توابع هیپربولیک و معکوس هیپربولیک

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}, \quad \sinh^2 x = \frac{\operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}$$

نکته: اگر در هر یک از اتحادهای مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ و $\operatorname{tg} x$ را با $i \sinh x$ و $i \cosh x$ و $i \operatorname{tgh} x$ (که $i^2 = -1$) عوض کنیم، اتحادهای هیپربولیک حاصل می‌شوند.



$$\sinh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

تابع معکوس $\sinh x$:

تابع $\cosh x$ در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی و در بازه $[0, \infty)$ صعودی است. برد آن $[1, \infty)$ می‌باشد. در نتیجه تابع $y = \cosh^{-1} x$ به دو شاخه یک مقداری که به ازای $x \geq 1$ معین هستند تقسیم می‌شوند. لذا:

$$\left(\cosh^{-1} x \right)_1 = \ln \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad \left(\cosh^{-1} x \right)_2 = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

از آنجا که $\ln \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) = -\ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$ پس تابع $\cosh x$ تابعی زوج است. $\sinh x$ و $\operatorname{tgh} x$ نیز توابعی فرد هستند.

$$\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

تابع معکوس $\operatorname{tgh} x$:

حد و پیوستگی

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ باشد f را در $x=a$ پیوسته گوئیم.

اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ باشد f را در $x=a$ پیوسته چپ گوئیم.

اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ باشد f را در $x=a$ پیوسته راست گوئیم.

مثال: به ازای کدام مقدار a و b تابع f با ضابطه زیر در $x=1$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - a} & x > 1 \\ [-x] + b & x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(1^+) = \frac{0}{1-a} = 0, \quad f(1^-) = -1 + b, \quad f(1) = -1 + b \Rightarrow b = 1, a \neq 1$$



حل:



نکته: اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد ولی تعریف نشده باشد، می‌توان با تعریف $f(a)$ برابر حد تابع در $x=a$ تابع را پیوسته کرد. به این نقطه «رفع شدنی» گویند.



مثال: $f(2)$ چند باشد تا تابع $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ در $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{2}}$$

حل:

مشتق و کاربرد آن

مشتق پذیری: تابع f را در $x=a$ مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود باشد که آن را مشتق تابع f در $x=a$ گوئیم.

(فرمول دوم مشتق $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(a)}{x}$)

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{و} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{مشتق چپ}$$

نکته ۱: $f'(a)$ و حد آن $\left(\lim_{x \rightarrow a} f'(x)\right)$ لزوماً برابر نیستند.



نکته ۲: برای محاسبه برخی مشتق‌ها استفاده از تعریف مناسب‌تر است.



مثال: اگر تابع f در شرط روبرو صدق کند، $f'(a)$ کدام است؟

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = b$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(a) + xa - f(a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} + a\right) = b + a$$

همانطور که در مثال دیده شد گاهی در حل مسایل لازم است از فرمول دوم مشتق استفاده کنیم.



نکته: از آنجا که مشتق شیب خط مماس در نقطه مفروض است لذا جهت محاسبه معادله خط‌های مماس یا عمود بر منحنی‌ها از آن استفاده می‌شود.

قضایای مشتق:

۱- مشتق مجموع تعداد متناهی از توابع برابر مجموع مشتقات آنهاست:

$$(u + v + \dots + w)' = u' + v' + \dots + w'$$

۲- مشتق حاصل ضرب دو تابع: $(uv)' = u'v + uv'$ به همین صورت:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

۳- مشتق خارج قسمت دو تابع: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ به همین صورت:

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

۴- مشتق تابع مرکب: $(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$:

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$



نکته: مشتق توابعی که به صورت حاصلضرب می‌باشند و نیز توابع توانی را می‌توان با گرفتن Ln و استفاده از فرمول بالا،

محاسبه کرد.

مثال: مشتق تابع $y = \sin x^{\cos x}$ را محاسبه کنید.

حل: \checkmark $\ln y = \cos x (\ln \sin x)$ حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y} = -\sin x (\ln \sin x) + \cos x \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) \Rightarrow y' = \sin x^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x (\ln \sin x) \right)$$

۵- مشتق تابع معکوس: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

مشتقات معروف:

$$(x^x)' = x^x (1 + \ln x), \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad (\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x), \quad (\operatorname{Arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right): \text{مشتق } n \text{ ام}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

نکته: زاویه بین دو خط $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ برابر است با:

- اگر $mm' = -1$ باشد دو خط بر هم عمودند.



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

برای یافتن معادله خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای خارج از منحنی، رابطه $\frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = f'(x)$ را استفاده می‌نمائیم. و نقطه مماس $\left(\frac{a}{b}\right)$ و شیب را می‌یابیم سپس از رابطه $y - b = f'(x)(x - a)$ معادله را می‌نویسیم.

برای یافتن معادله خط عمود بر منحنی از نقطه خارج آن از رابطه $\frac{F(X) - y_1}{x - x_1} = \frac{-1}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم.

قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{در محاسبه حدهای مبهم } \left(\frac{0}{0}\right) \text{ یا } \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ یا } 1^\infty \text{ می‌توان از آن استفاده کرد:}$$

شرط استفاده از این قاعده، مشتق‌پذیری f و g در a است.



نکته: در محاسبه حدهای 1^∞ یا مشابه باید از دو طرف \ln بگیریم و با ایجاد کسر فوق، از قاعده هوییتال استفاده نمائیم.



$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad ; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{سری تیلور:}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad \text{بسط مک لورن:}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{بسط‌های مهم:}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad , \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$g(x) = |f(x)| \Rightarrow g'(x) = f'(x) \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

مشتق تابع قدر مطلق:

آهنگ تغییر کمیت‌های وابسته: برای حل مسایل مربوط به این قسمت ابتدا باید تابع ضمنی را بیابید سپس نسبت به متغیر خواسته شده مشتق

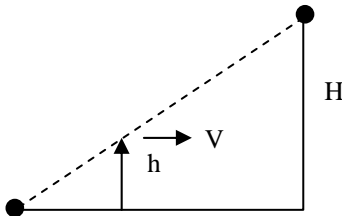
بگیرید.



مثال: در شکل، شخصی با قد H و با سرعت V به سمت تیر چراغی به ارتفاع H حرکت می‌کند. سرعت سایه شخص را بر حسب

h و H و V به دست آورید. (به مقادیر ثابت و متغیر باید دقت کنید)

حل: y فاصله سایه سر تا چراغ = y و x فاصله شخص تا چراغ = x



$$\Rightarrow \frac{y-x}{y} = \frac{h}{H} \Rightarrow (H-h)y - Hx = 0 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = V \Rightarrow -H \frac{dx}{dt} + (H-h) \frac{dy}{dt} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = \frac{H}{H-h} V$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

نکته: اگر بین x و y رابطه $f(x,y)=0$ برقرار باشد در این صورت مشتق y برابر است با:



نقاط بحرانی:

نقطه‌ای که در آن یکی از دو شرط روبرو برقرار باشد: (۱) $f'(a)=0$ (۲) $f'(a)$ موجود نباشد.

انواع نقاط بحرانی:

- نقاط ناپیوستگی تابع

- نقاط زاویه‌دار (نکته: زاویه بین دو مماس برابر است با:

$$(\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{f'_1(a) - f'_2(a)}{1 + f'_1(a)f'_2(a)} \right|)$$

- نقاط بازگشت: مشتق‌های چپ و راست مختلف علامه

- نقاط عطف قائم: مشتق‌های چپ و راست هم علامت - تقعر منحنی تغییر می‌کند. (" y تغییر علامت می‌دهد)

- نقاط عطف افقی: مشتق‌های چپ و راست مختلف علامه - تقعر منحنی تغییر می‌کند (" y تغییر علامت می‌دهد)

- نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی: مشتق صفر و تغییر علامت مشتق

قضیه رل: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد و نیز $f(a)=f(b)$ آنگاه وجود دارد یک نقطه c در بازه (a, b) به

قسمی که $f'(c)=0$.



قضیه مقدار میانگین: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه وجود دارد نقطه c در بازه (a, b) به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

قضیه کوشی: تعمیم قضیه مقدار میانگین، اگر f و g پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشند



مثال: مقدار c در قضیه مقدار میانگین تابع $f(x) = \arcsin x$ وقتی $0 \leq x \leq 1$ باشد را تعیین کنید.

حل:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{1 - 0} \Rightarrow c = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$$

قضیه نامساوی: اگر f و g در بازه (a, ∞) مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر $x > a$ داشته باشیم $f'(x) \geq g'(x)$ همچنین f و g در $x=a$ دارای مقادیر مساوی باشند آنگاه خواهیم داشت $f(x) \geq g(x)$.

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه هر مقداری را بین $f(a)$ و $f(b)$ در بازه $[a, b]$ اختیار می‌کند.



مثال: تعداد ریشه‌های معادله $x \sin x = 1$ را در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تعیین کنید.

$$f(x) = x \sin x; \quad f(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه چون $1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ است و همچنین $f(x)$ صعودی است در نتیجه در این بازه معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

قضیه تله موش:

اگر f و g در $x=a$ دارای حدی برابر باشند (L) و در یک همسایگی a داشته باشیم: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ در این صورت تابع f نیز در $x=a$ دارای حدی برابر L است.

نمونه سوالات

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg} x - \arcsin x}{x^3}$$

۱- حد مقابل کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad -\frac{1}{3} \quad (4)$$

۲- تابع f در رابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \ln x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ صدق می‌کند. کدام صحیح است؟

(۱) f تنها دارای دو مینیمم نسبی است

(۲) f دارای نقطه عطف است

(۳) معادله $f(x) = x$ دو ریشه حقیقی دارد

(۴) معادله $f(x) = x$ دو ریشه حقیقی دارد

۳- اگر $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x, y) = f(x)f(y)$ و $f(0) \neq 0$ آنگاه دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ کدام است؟

(۱) \mathbb{R}

(۲) $[0, \infty)$

(۳) $[-1, 1]$

(۴) $\{0\}$

۴- مشتق دهم تابع $f(x) = x^2 e^{(x-1)}$ در $x=1$ کدام است؟

(۱) ۹۱

(۲) ۱۰۱

(۳) ۱۱۱

(۴) ۱۲۱



۵- ضریب زاویه خط قائم بر منحنی تابع معکوس تابع $y=f(x)$ در هر نقطه (x, y) روی آن برابر $2y+1$ می باشد. اگر $f(0)=1$ باشد. $f(2)$ کدام است؟

۷ (۴)

-۶ (۳)

-۵ (۲)

۳ (۱)

حل نمونه سؤالات:

۲-۱: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctg} x - \text{Arcsin} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) - \left(x + \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

۴-۲: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad ; \quad y = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

نقطه های $(0,0)$ و $(-1,1)$ و $(1,1)$ همه مینیمم نسبی هستند و $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} > 0$ منحنی نقطه عطف ندارد.

معادله $f(x) = \frac{\pi}{3} > 1$ دارای چهار ریشه حقیقی است. معادله $f(x) = x$ دو ریشه حقیقی مثبت یکی $x_1 = 1$ و دیگری $x_2 > 1$ دارد.

۱-۳: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x) = a^x \quad g(x) = a^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

۳-۴: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x+1) = (x+1)^2 e^x \Rightarrow f(x+1) = (x^2 + 2x + 1)(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots) \quad C_{1,0} = \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$\Rightarrow f^{(1,0)}(1) = 1 \cdot 1! C_{1,0} = 111$$

۲-۵: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$m = -\frac{1}{(f^{-1})'} = -f'(y) = 2y + 1 \Rightarrow f(y) = -y^2 - y + c \quad f(0) = c = 1 \Rightarrow f(y) = -y^2 - y + 1 \Rightarrow f(2) = -5$$