



## خرپاها:

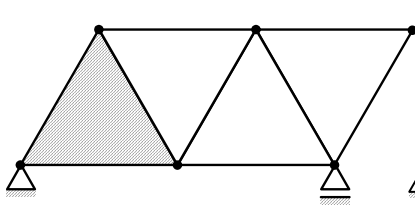
یادآوری: به سازه‌هایی که تمام اعضای آنها، اعضای دو نیرویی (با باربری محوری) و اتصالات آنها، مفصلی باشد، خرپا گویند.

### - انواع خرپا:

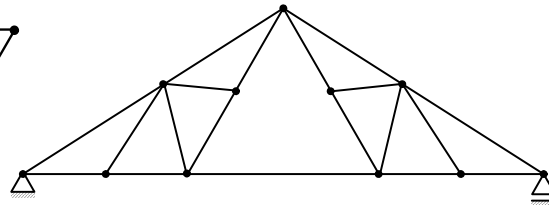
۱- خرپای ساده: اساس تشکیل این نوع خرپا، یک مثلث است که با اضافه کردن متوالی دو عضو غیر هم امتداد و یک مفصل، گسترش می‌یابد.

۲- خرپای مرکب: از اتصال دو یا چند خرپای ساده به وجود می‌آید.

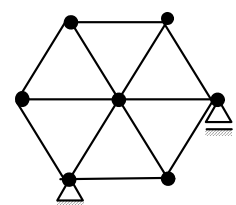
۳- خرپای پیچیده: خرابایی که جزو خراباهای بالا نباشد، پیچیده نامیده می‌شود.



۱- ساده



۲- مرکب



۳- پیچیده

تعداد قیدهای تکیه‌گاهی



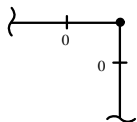
$$n = m + r - 2j \rightarrow \text{تعداد گره‌ها} \rightarrow \text{تعداد اعضا}$$

- تعیین درجه نامعینی در خراباها از رابطه زیر به دست می‌آید:

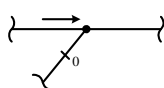


نکته: در تعیین نیروهای داخلی اعضای خراباها، تشخیص اعضای صفر نیرویی، اهمیت زیادی دارد. موارد زیر را به خاطر بسپارید:

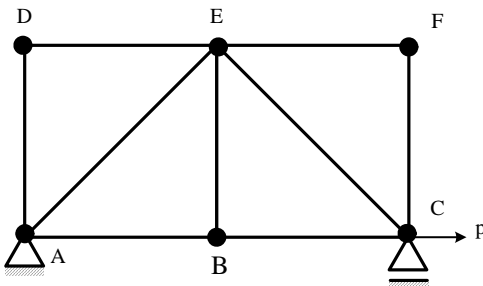
- در گرهی که فقط دو عضو غیر هم امتداد دارد، و هیچ نیرویی بدان وارد نمی‌شود، هر دو عضو صفر نیرویی‌اند ←



- در گره‌های سه عضوی، اگر دو عضو در امتداد هم باشند و دیگری غیر هم امتداد با آنها باشد، (به شرطی که نیروی وارد به گره یا صفر



باشد و یا فقط در امتداد دو عضو هم امتداد باشد)، عضو غیر هم امتداد صفر نیرویی است ←



مثال: در خرابای مقابل نیروی عضو AB چقدر است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} P \quad (2)$$

$$P \quad (4)$$



$$\frac{P}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} P \quad (3)$$

✓ حل با دقت در گره‌های D و F مشخص می‌شود، اعضای AD و DE و EF و CF صفر نیرویی می‌باشند. در گره B هم عضو BE صفر نیرویی می‌باشد. در گره E، دو عضو غیر هم امتداد CE و AE باقی می‌مانند که آنها هم صفر نیرویی می‌باشند. پس فقط اعضای AB و



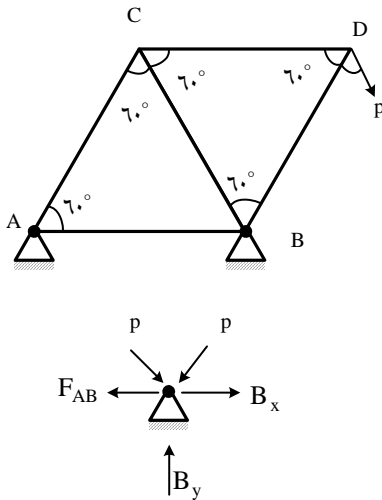
BC دارای نیرو می‌باشند که نیروی هر دو آنها هم از تعادل P به دست می‌آید. گزینه ۴ صحیح است.



نکته: از مقاومت مصالح می‌دانیم که تغییر مکان محوری در یک عضو خرپایی که نیروی F دارد برابر است با  $\Delta = \frac{FL}{EA}$  و اگر عضوی نتواند تغییر طول محوری داشته باشد، پس نیرویی هم در آن نمی‌افتد.



مثال (کنکور ارشد ۸۳): خرپای شکل مقابل دارای اعضای با طول مساوی L و صلیب محوری EA می‌باشد. عکس‌العمل افقی B برابر است با:



- (۱) صفر  
(۲)  $\frac{P}{2}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}P$   
(۴)  $\sqrt{3}P$



حل از نوشتن معادلات تعادل در گره‌های C و D.

نیروی اعضای BD و CB به دست می‌آید حال در گره B داریم:

از طرفی طبق نکته بالا، چون عضو AB بین دو تکیه‌گاه

موضع قرار دارد و نمی‌تواند تغییر طول محوری بدهد، داریم:

$F_{AB} = 0$ . و با توجه به شکل نتیجه می‌شود که  $B_x$  هم صفر می‌باشد.

پس گزینه ۱ درست است.

- روش کار مجازی (بار واحد) در خرپاها:

$$1 \times \Delta + W_R = \sum_i \frac{n_i N_i L_i}{EA_i} + \sum_i n_i (\alpha \Delta T)_i l_i + \sum_i n_i \delta_i \pm \sum_i |n_i \delta_i|$$

اثر نشست تکیه گاهی      اثر نیرو      اثر درجه حرارت      اثر نقص ساخت      اثر خطای ساخت

$n_i$ : نیروی عضو i در سازه بار واحد

$N_i$ : نیروی عضو i در سازه اصلی

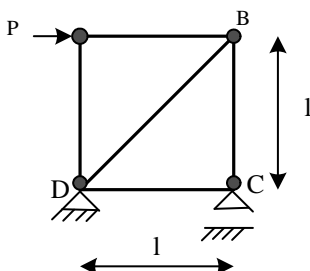


نکته: فرق خطای ساخت و نقص ساخت در این است که مقدار نقص ساخت، مشخص است (مثلاً یک عضو، ۱cm بلندتر ساخته شده) ولی جهت خطای ساخت مشخص نیست (به همین خاطر اثر آن به صورت  $\pm$  در نظر گرفته می‌شود. مثلاً وقتی می‌گوئیم نقص ساخت در عضوی ۱cm است مشخص نیست عضو ۱cm بلندتر ساخته شده یا کوتاه‌تر).

- اثر نشست تکیه‌گاهی عبارت است از: مقدار نشست تکیه‌گاه در سازه اصلی  $\times$  مقدار نیروی تکیه‌گاه در سازه بار واحد (به مثبت یا منفی بودن این کمیت دقت داشته باشید).



نکته: هر گاه بخواهیم مقدار نزدیک شدن (یا دور شدن) دو نقطه را در سازه‌ای، به یکدیگر به دست بیاوریم، کافی است در سازه بار واحد، دو نیروی واحد، در آن دو نقطه و در امتداد خط واصل بین آن دو نقطه، اعمال کرده و از فرمول بار واحد، مقدار نزدیک شدگی (و یا دور شدگی) آن دو نقطه را نسبت به هم به دست بیاوریم.



مثال در خرپای مقابل، همه اعضا را به اندازه  $\Delta t$  گرم می‌کنیم.  $\Delta t$  چقدر باشد تا در اثر نیروهای وارده به سازه و حرکت تکیه‌گاه C (به سمت بالا)، نقطه B، تغییر مکان افقی نداشته

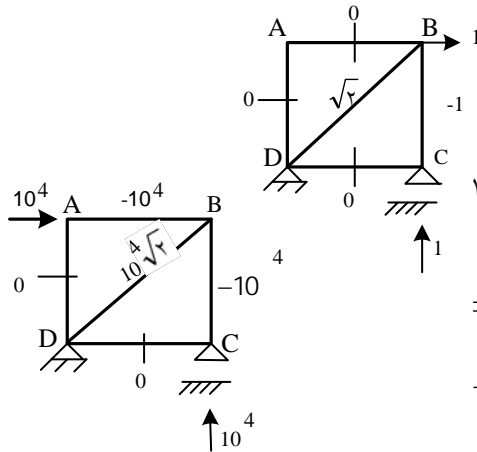
باشد؟  $(p = 10 \text{ ton}, \quad 1 = 1 \text{ m}, \quad EA = 4 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C})$





✓ حل سازه‌های اصلی و بار واحد را تحلیل می‌کنیم.

(واحدها kg و cm می‌باشد کشش مثبت و فشار منفی در نظر گرفته شده است)



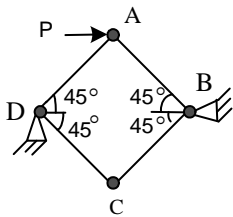
$$1 \times \Delta_B + w_R = \sum_i \frac{n_i N_i l_i}{EA} + \sum_i n_i \alpha \Delta t l_i$$

$$\Rightarrow 1 \times 0 + 1 \times 1 = \frac{(-1)(-10^4)(10\sqrt{2})}{\epsilon \times 10^6} + \frac{(\sqrt{2})(10^4 \sqrt{2})(10\sqrt{2})}{\epsilon \times 10^6} + (-1)(10^{-5})(\Delta t)(10\sqrt{2})$$

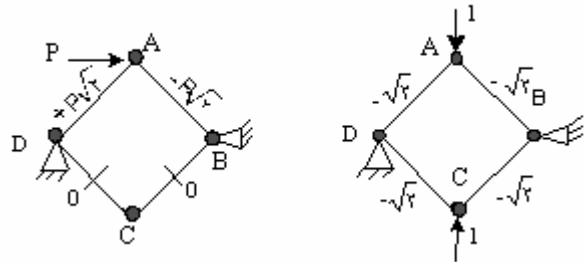
$$+ (\sqrt{2})(10^{-5})(\Delta t)(10\sqrt{2}) \Rightarrow 1 = 0.957 + 10^{-3} \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = 43^\circ \text{C}$$



مثال: مقدار نزدیک شدگی دو نقطه A و C را در خرپای روبرو به دست آورید: (طول همه اعضا l و صلبیت محوری EA می‌باشد)



✓ حل دو سازه اصلی و بار واحد را تحلیل می‌کنیم (کشش: + و فشار: -)



$$1 \times \Delta_{A \leftrightarrow C} = \frac{(-\sqrt{2})(-p\sqrt{2})l}{EA} + \frac{(-\sqrt{2})(+p\sqrt{2})(l)}{EA} = 0$$

سازه اصلی

سازه بار واحد

## خط تأثیر:

- یادآوری:

خط تأثیر: تغییرات یک کمیت (عکس‌العمل تکیه‌گاهی، لنگر خمشی، نیروی برشی، تغییر مکان و...) در یک نقطه مشخص از سازه در اثر حرکت بار واحد از ابتدا تا انتها سازه را نشان می‌دهد.

## خط تأثیر در تیرهای معین:

- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی: برای رسم خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی در یک تیر کافیهست. قید مربوطه را حذف کرده تغییر مکان واحدی به سازه در نقطه مورد نظر و در جهت بالا اعمال نمائیم. منحنی تغییر شکل یافته تیر معرف خط تأثیر مورد نظر است.

- نیروی برشی: برای رسم خط تأثیر نیروی برشی در یک مقطع از تیر، مقاومت در برابر برش در آن مقطع را حذف کرده، با توجه به جهت قرار دادی نیروی برشی، اختلاف ارتفاعی برابر با واحد بین سمت چپ و راست مقطع ایجاد می‌نمائیم. به طوری که نیروهای برشی مثبت، کار مثبت انجام دهند و قسمت‌های چپ و راست، پس از اعمال تغییر مکان، با هم موازی باشند منحنی تغییر شکل یافته تیر در این حالت معرف خط تأثیر می‌باشد.

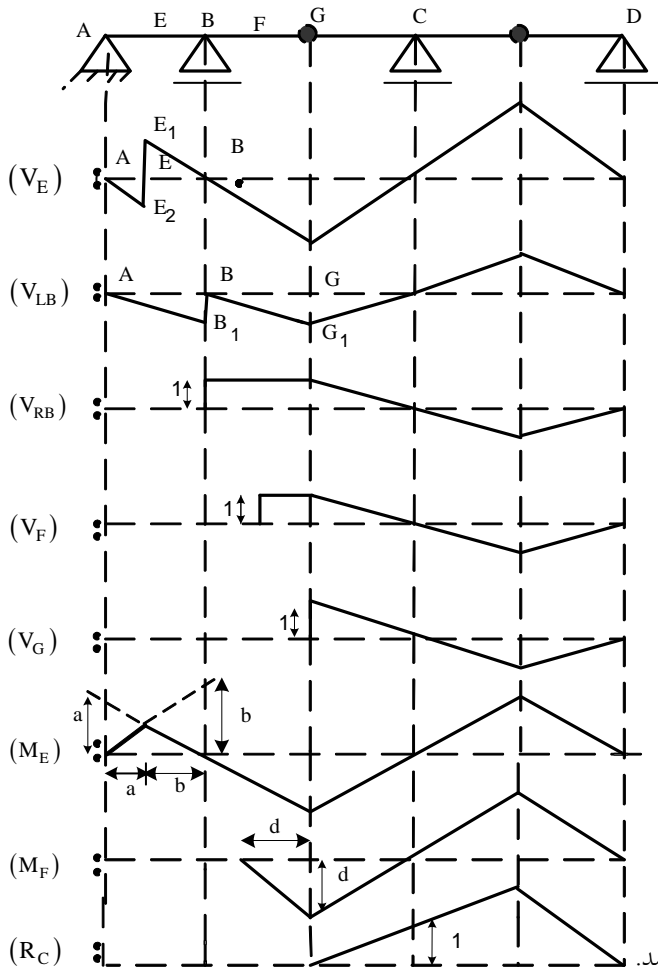


- لنگر خمشی: برای رسم منحنی خط تأثیر لنگر خمشی در یک مقطع از تیر، ابتدا مقاومت در برابر لنگر خمشی در آن نقطه را از بین می‌بریم یا به عبارتی در آن نقطه یک مفصل داخلی، ایجاد می‌نمائیم. سپس اختلاف شیب واحد بین قسمت‌های چپ و راست مفصل ایجاد می‌کنیم به طوری که لنگر خمشی مثبت کار مثبت انجام دهد. منحنی تغییر شکل یافته تیر معرف خط تأثیر لنگر خمشی در مقطع مورد نظر می‌باشد.

- خط تأثیر نیروی محوری در خرپاها: برای ترسیم خط تأثیر نیروی محوری در یک عضو از خرپا، آن عضو را برش داده و دو سه عضو را به اندازه واحد به هم نزدیک می‌کنیم. شکل تغییر مکان خرپا، معرف خط تأثیر نیروی محوری عضو مورد نظر است.



مثال: در سازه روبرو مطلوبست به دست آوردن خط تأثیر  $V_E$ ،  $V_{IB}$  (برش سمت چپ B)،  $V_{RB}$  (برش سمت راست B)،  $V_G$ ،  $V_F$ ،  $M_E$ ،  $M_F$  و  $R_C$ ؟



تذکر: شیب خطوط  $BE_1$  و  $AE_2$  باید برابر باشد و طول  $E_1E_2$  باید واحد باشد.

تذکر: شیب خطوط  $AB_1$  و  $BG_1$  باید برابر باشد و طول  $BB_1$  باید واحد باشد.

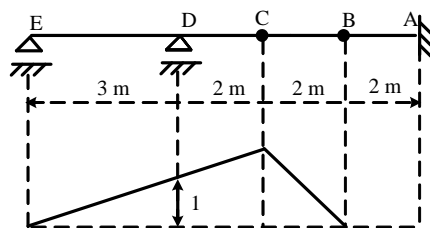
تذکر: چون نقطه G مفصل است، لزومی ندارد شیب چپ و راست آن با هم برابر باشد.



مثال (کنکور ارشد ۷۷): اگر یک بار منفرد ۳ تنی از روی تیر شکل زیر حرکت کند،

اندازه ماکزیمم عکس‌العمل تکیه‌گاه D چند تن است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)  $\frac{10}{3}$

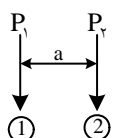
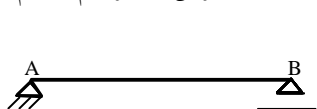
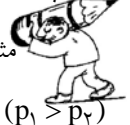


حل: ابتدا خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه D را رسم می‌نمائیم. مقدار خط تأثیر در تکیه‌گاه D، یک و در C برابر است با  $\frac{5}{3}$ . (از تشابه).

در نتیجه در اثر عبور بار ۳ تنی از روی تیر، ماکزیمم عکس‌العمل تکیه‌گاه D وقتی اتفاق می‌افتد که بار از نقطه C عبور کند و مقدار آن برابر

است با:  $R_D = 3 \text{ ton} \times \frac{5}{3} = 5 \text{ ton}$ . گزینه ۲ صحیح است.

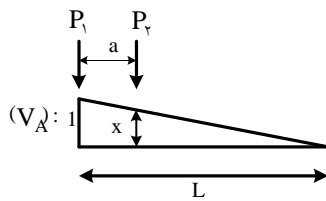
مثال (کنکور ارشد ۸۰): دو نیروی متمرکز با فاصله ثابت از روی تیری به طول L می‌گذرند. برش ماکزیمم کدام است؟



- (۱)  $P_1 + P_2$  (۲)  $P_1 + \frac{a}{L} P_2$  (۳)  $P_2 + \frac{a}{L} P_1$  (۴)  $P_1 + \frac{1-a}{L} P_2$



حل در این مسأله خط تأثیر در نقطه خاصی، خواسته نشده است. اما می‌دانیم برش ماکزیمم در یک تیر در مجاورت تکیه‌گاه قرار دارد. از آنجا که  $p_1 > p_2$  و فاصله بین دو بار ثابت است کافی است بار  $p_1$  بر روی یکی از تکیه‌گاه‌ها و بار  $p_2$  به فاصله  $a$  از آن قرار داشته باشد تا برش در این تیر ماکزیمم شود:



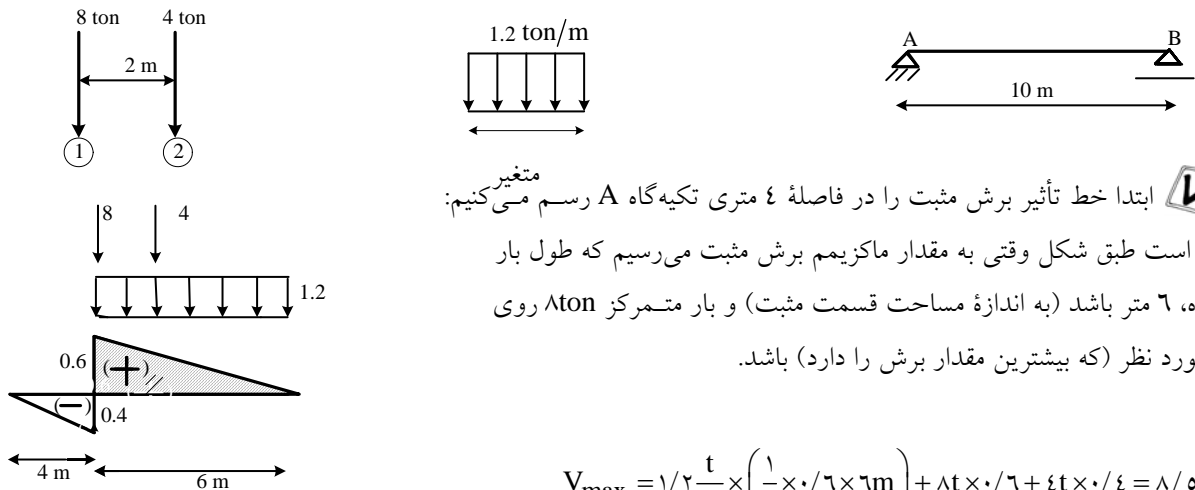
$$\Rightarrow x = \frac{1-a}{1} \Rightarrow V_{\max} = p_1 \times 1 + p_2 \times \frac{1-a}{1}$$

گزینه ۴ صحیح است.

نکته: در مسائلی که بار گسترده از روی تیر عبور می‌کند، مقدار کمیت مورد نظر مسأله برابر است با شدت بار ضرب در مساحت متناظر با آن واقع در روی منحنی خط تأثیر (با در نظر گرفتن علامت جبری)



مثال (کنکور ارشد ۷۹): تیری به طول ۱۰m تحت اثر یک جفت بار متمرکز متحرک به طور سری و یک بار زنده گسترده متحرک با طول متغیر قرار می‌گیرد. مطلوب است محاسبه برش ماکزیمم مثبت در فاصله ۴ متری تکیه‌گاه A.



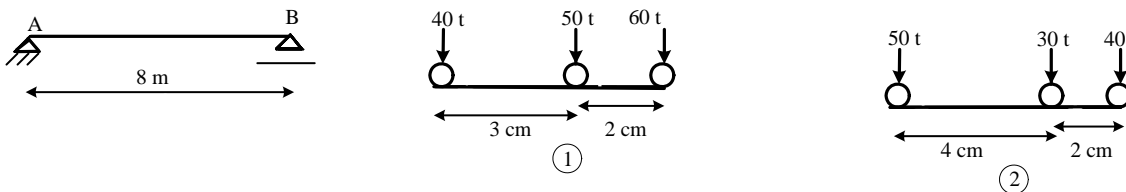
حل ابتدا خط تأثیر برش مثبت را در فاصله ۴ متری تکیه‌گاه A رسم می‌کنیم:

بدیهی است طبق شکل وقتی به مقدار ماکزیمم برش مثبت می‌رسیم که طول بار گسترده، ۶ متر باشد (به اندازه مساحت قسمت مثبت) و بار متمرکز ۸ton روی نقطه مورد نظر (که بیشترین مقدار برش را دارد) باشد.

پس:

$$V_{\max} = 1/2 \times \frac{t}{m} \times \left( \frac{1}{2} \times 0.6 \times 6 \times 6m \right) + 8t \times 0.6 + 4t \times 0.4 = 8.6 \text{ ton}$$

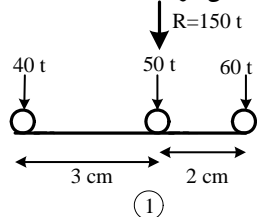
مثال) در تیر زیر حداکثر مطلق لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری متحرک نشان داده شده ۱ و ۲ چقدر است؟



نکته: در این گونه مسائل که با ۳ بار روبرو هستیم دو حالت پیش می‌آید.

- حالت اول: اگر برآیند ۳ بار، روی بار وسطی بیفتد، کافی است بارها را طوری روی تیر قرار دهیم که بار وسطی روی وسط تیر قرار بگیرد و با نوشتن معادله لنگر، لنگر را در وسط تیر به دست بیاوریم که حداکثر مطلق لنگر خمشی تیر خواهد بود.

- حالت دوم: اگر مورد بالا محقق نشد، حداکثر لنگر خمشی هنگامی ایجاد می‌شود که مرکز تیر در وسط فاصله بین برآیند بارها و بار نزدیک‌تر (به آن) قرار بگیرد. و حداکثر لنگر خمشی در زیر بار نزدیک‌تر به برآیند بارها ایجاد می‌شود.

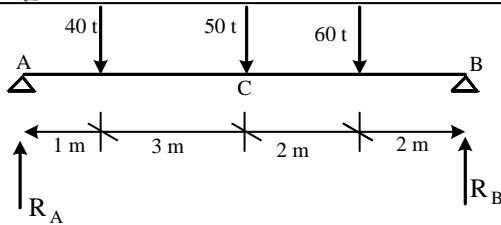


حل در مورد بار (۱) داریم:

(برآیند بارها روی بار وسطی می‌افتد)



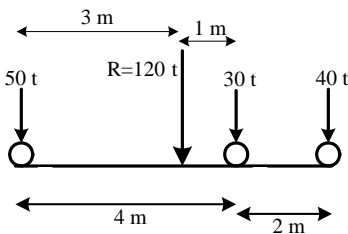
پس لنگر خمشی ماکزیمم (وسط دهانه) برابر است با:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \times 8 - 40 \times 7 - 50 \times 4 - 60 \times 2 = 0 \Rightarrow R_A = 75 \text{ t}$$

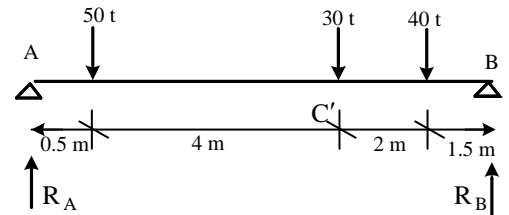
$$\Rightarrow M_{\max} = M_C = 75 \times 4 - 40 \times 3 = 180 \text{ t.m}$$

- در مورد بارگذاری شماره (۲) داریم: چون برآیند بارها به بار ۳۰ t نزدیک‌تر است، کافی است مرکز تیر در وسط فاصله بین برآیند بارها و بار ۳۰ t قرار بگیرد و حداکثر مطلق لنگر خمشی زیربار ۳۰ t ایجاد خواهد شد.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8 \times R_A - 50 \times 7.5 - 30 \times 3.5 - 40 \times 1.5 = 0 \Rightarrow R_A = 67.5 \text{ t}$$

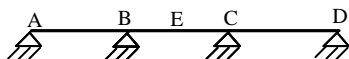
$$\Rightarrow M_{\max} = M_{C'} = 67.5 \text{ t} \times 4.5 \text{ m} - 50 \text{ t} \times 1 \text{ m} = 103.25 \text{ t.m}$$



### - فضا تأثیر کیفی تیرهای نامعین:

عیناً مانند خط تأثیر تیرهای معین می‌باشد، با این تفاوت که تغییر شکل سازه به صورت منحنی است (نه خطی).

مثال: خط تأثیر کمیت‌های زیر را رسم نمایید:



$V_{LB}, M_E, V_E, M_B, R_B, R_A$

