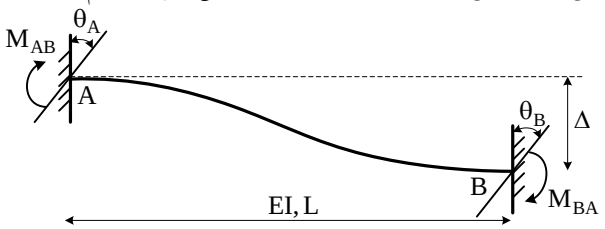
تحلیل سازه‌های یک

تحلیل سازه‌های نامعین: روش‌های مناسب در تحلیل سازه‌های نامعین عبارتند از "شیب افت، روش سازگاری تغیر شکل‌ها قضایای کاستیلیانو، روش پخش لنگر وروش سه لنگری" در نوبت قبلی به بررسی روش سازگاری تغییر شکل‌ها پرداختیم. حالا روش شیب افت را مرور می‌کنیم:

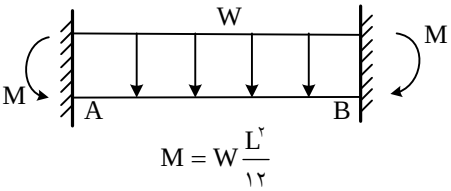


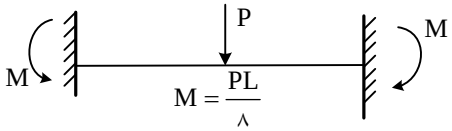
- معادلات شیب افت:

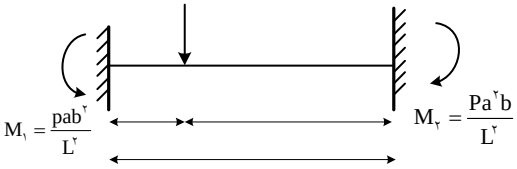
$$\begin{cases} M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{l}) + \bar{M}_{AB} \\ M_{BA} = \frac{2EI}{l}(\theta_A + 2\theta_B - \frac{3\Delta}{l}) + \bar{M}_{BA} \end{cases}$$

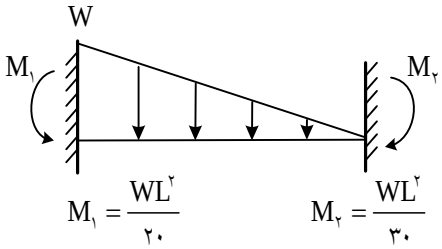
- در روابط فوق $\bar{M}_{AB}$ و $\bar{M}_{BA}$ به ترتیب لنگرهای گیرداری بارگذاری مورد نظر در تیکه‌گاه‌های A و B می‌باشد. θ_B, θ_A دوران گره A و B و Δ تغییر مکان نسبی A و B می‌باشد.

- لنگرهای گیرداری چند بارگذاری خاص عبارتند از:



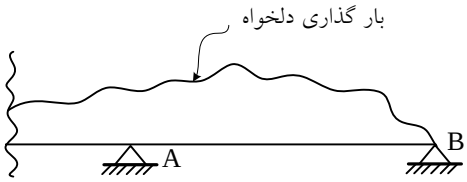






- معادله شیب افت اصلاح شده:

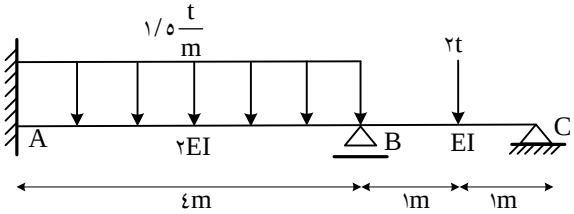
اگر تکیه‌گاه خارجی در یک تیر سراسری، ساده باشد معادلات شیب افت به صورت زیر اصلاح خواهند شد:



$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\left(\theta_A - \frac{\Delta}{l}\right) + \bar{M}_{AB} - \frac{1}{2}\bar{M}_{BA}$$

- با توجه به معادله فوق، در حالت تیر یکسر گیردار، یک سر مفصل در بارگذاری‌های متقارن، لنگر گیرداری انتهای گیر دار ۱/۵ برابر حالت دو سر گیردار است.

مثال) در سازه زیر θ_C را به دست آورید:



حل

$$M_{BC}=\frac{3EI}{l}\left(\theta_B-\frac{\Delta}{l}\right)+\bar{M}_{BC}-\frac{1}{2}\bar{M}_{CB}\Rightarrow M_{BC}=\frac{3EI}{2}(\theta_B)+\left(-\frac{2\times2}{8}-\frac{1}{2}\times\frac{2\times2}{8}\right)=1/5EI\theta_B-0/75$$

$$M_{BA}=\frac{2(2EI)}{4}(2\theta_B)+\frac{1/5\times4^2}{12}=2EI\theta_B+2$$

$$\sum M_B=0\Rightarrow M_{BA}+M_{BC}=3/5EI\theta_B+1/25=0\Rightarrow\theta_B=-\frac{0/357}{EI}$$

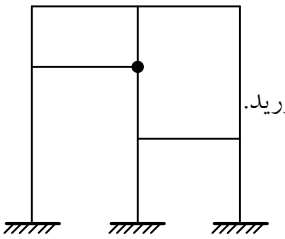
$$M_{CB}=EI(\theta_B+2\theta_C)+0/5=0\Rightarrow\theta_C=-\frac{0/0714}{EI}$$

– در قاب‌های صفحه‌ای درجه نامعینی سینماتیکی برابر است با: $n_c=3j+c-r$

و در قاب‌های فضایی درجه نامعینی سینماتیکی برابر است با: $n_c=6j+c-r$

که روابط فوق j تعداد گره‌ها، c تعداد معادلات شرط و r تعداد قیدهای تکیه‌گاهی می‌باشد.

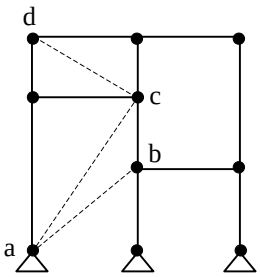
– هر گره یک درجه آزادی دورانی دارد. (بجز مفصل‌ها که دو درجه آزادی دورانی دارند). در طرفین یک مفصل برشی هم دو درجه آزادی انتقالی داریم. اگر از تغییر مکان‌های محوری اعضا صرفنظر شود، درجات نامعینی انتقالی برابر است با تعداد میله‌هایی که باید به سازهٔ مفصلی شده اضافه نمود تا پایدار شود. در ضمن به یاد داشته باشید که در اعضای صلب درجه آزادی دورانی با درجه آزادی انتقالی رابطه دارد (و از هم مستقل نیستند)



مثال) اگر از تغییر طول محوری اعضاء صرفنظر شود، درجه نامعینی سینماتیکی سازه مقابل را به دست آورید.

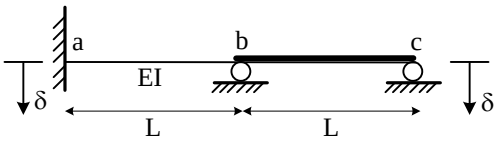
حل طبق نکات ذکر شده، سازه ۸ درجه آزادی دورانی دارد (٦ گره صلب و ۱ گره مفصلی)

برای به دست آوردن درجه نامعینی انتقالی تمام گره‌های سازه را مفصل می‌کنیم:



با افزودن ۳ میلهٔ ab، ac و cd سازه پایدار می‌شود پس با صرفنظر از تغییر شکل‌های محوری، ۳ درجه آزادی انتقالی داریم.

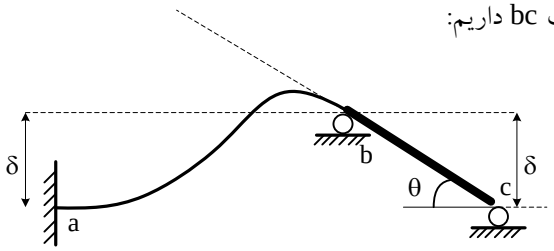
مثال) (کنکور ارشد ۸٤): در تیر شکل مقابل تحت نشست‌های تکیه‌گاهی نشان داده شده M_{ab} چقدر است؟



۱) $\frac{8EI\delta}{L^2}$ ۲) $\frac{6EI\delta}{L^2}$

۳) $\frac{4EI\delta}{L^2}$ ٤) $\frac{3EI\delta}{L^2}$

حل با توجه به تغییر شکل سازه و با توجه به رابطه θ و δ در تیر صلب bc داریم:



$$\delta=l\theta\rightarrow\theta=\frac{\delta}{l}$$

$$ab: M_{ab}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_a+\theta_b-\frac{3\Delta}{l}\right)$$

$$=\frac{2EI}{l}\left(0+\left(\frac{-\delta}{l}\right)-\frac{3\delta}{l}\right)=\frac{-8EI}{l^2}\delta$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

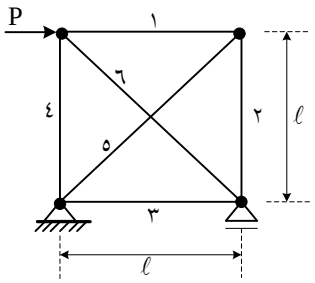
روش حداقل کار:

در این روش، به تعداد درجات نامعینی سازه، مجهول می‌گیریم. و با نوشتن معادلات نیروی محوری (در خرپاها) و لنگر خمشی (در قاب‌ها با صرفنظر از اثر نیروی برشی و محوری)، از روابط زیر مجهولات به دست می‌آیند:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{N_i\left(\frac{\partial N_i}{\partial X_i}\right)li}{(EA)_i}=0 \qquad \text{(در خرپاها)}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial X_i}\right)dx}{EI}=0 \qquad \text{(در قاب‌ها)}$$

مثال) خرپای زیر را تحلیل کنید:

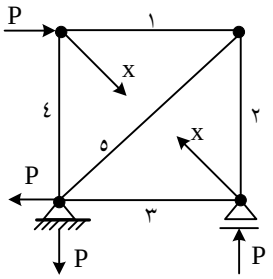


حل

$$n=m+r-2j=6+3-2(4)=1$$

چون سازه یک درجه نامعین است. یک مجهول نیاز داریم. این مجهول می‌تواند یکی از عکس‌العمل‌ها و یا نیروی داخلی یکی از اعضا باشد.

با مجهول گرفتن نیروی عضو ۶ و نوشتن نیروهای سایر اعضا، بر حسب این مجهول داریم:



$$F_1=-p-\frac{\sqrt{2}}{2}x \qquad F_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$F_2=-p-\frac{\sqrt{2}}{2}x \qquad F_5=\sqrt{2}p+x$$

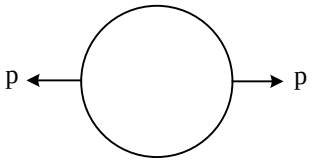
$$F_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{N_i\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)li}{EA}=0\Rightarrow 2\frac{\left(-p-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l}{EA}+2\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l}{EA}+\frac{\left(\sqrt{2}p+x\right)(1)\left(\sqrt{2}\,l\right)}{EA}$$

$$+\frac{(x)(1)\left(\sqrt{2}\,l\right)}{EA}=0\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}p \quad \text{(نیروی فشاری)}$$

با به دست آمدن x (نیروی عضو ۶ ام) نیروی سایر اعضا هم به دست می‌آید.

مثال) نیروهای داخلی حلقه روبرو را به دست آورید:



(ثابت = EI, GA, fs, EA)

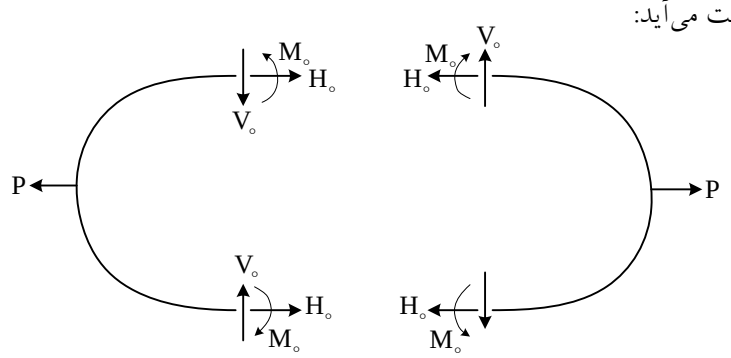
حل اولاً اگر سازه‌ای خود به خود در حالت تعادل باشد، (بدون وجود هیچ‌گونه تکیه‌گاهی) داریم:

(k: تعداد فضاهای بسته و c: تعداد معادلات شرط) $n=3k-c$ (درجه نامعینی)

پس سازه ۳ درجه نامعین است. $\Rightarrow n=3\times1-0=3$

اگر حلقه را از وسط جدا کنیم، نیروهای داخلی حلقه در محل جدا شدن به صورت روبرو است.

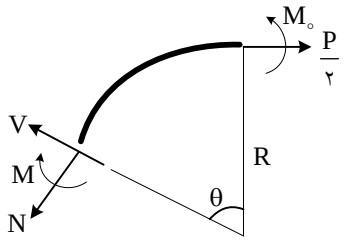
از تعادل افقی هر نیم حلقه به دست می‌آید: $H_\circ = \frac{p}{۲}$



با کمی دقت در شکل دیده می‌شود که نیروی $V_\circ$ در نیم حلقه سمت چپ سعی در نزدیک کردن دو سر نیم حلقه و در نیم حلقه سمت راست سعی در دور کردن دو سر نیم حلقه نسبت به هم دارد که با هم سازگار نیستند. پس: $V_\circ = \circ$

در نتیجه تنها مجهول، $M_\circ$ است. پس با نوشتن معادلات حداقل کار و به دست آوردن $M_\circ$، تمامی نیروهای داخلی حلقه به دست می‌آید:

با مقطع زدن از یک نقطه دلخواه و به دست آوردن نیروهای داخلی داریم و



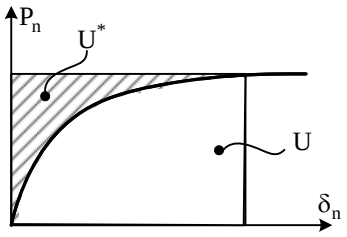
$$\begin{cases} M = M_\circ - \frac{PR}{۲}(۱-\cos\theta) \\ V = \frac{p}{۲}\sin\theta \\ N = \frac{p}{۲}\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_\circ} = \circ \Rightarrow \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{M_\circ}\right)ds}{EI} + \int_l \frac{f_s V \cancel{\left(\frac{\partial V}{\partial M_\circ}\right)}^{\circ} ds}{GA} + \int_l \frac{N \cancel{\left(\frac{\partial N}{\partial M_\circ}\right)}^{\circ} ds}{EA} = \circ$$

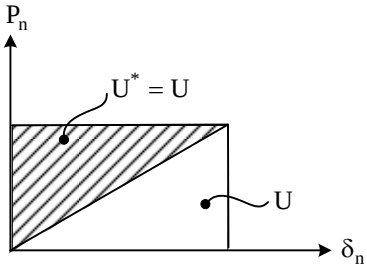
$$\Rightarrow ۴\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\left[M_\circ - \frac{PR}{۲}(۱-\cos\theta)\right](۱)(Rd\theta)}{EI} = \circ \Rightarrow M_\circ = PR\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\pi}\right)$$

نکته: در قضیه دوم کاستیلیانو داریم: $\frac{\partial U^*}{\partial p_n} = \delta_n$

که U^* مساحت انرژی مکمل است: در شکل روبرو برابر است با مساحت مستطیل منهای مساحت زیر منحنی $(P_n - \delta_n)$ (که معرف انرژی سیستم U است)



تنها در صورتی که رابطه P_n بر حسب δ_n خطی باشد U و U^* با هم برابرند و داریم: $\frac{\partial U^*}{\partial P_n} = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n$

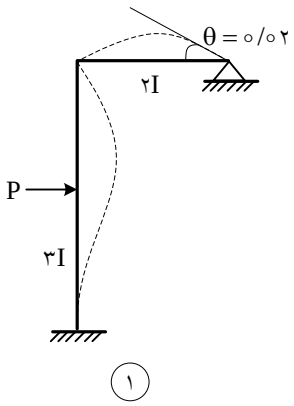


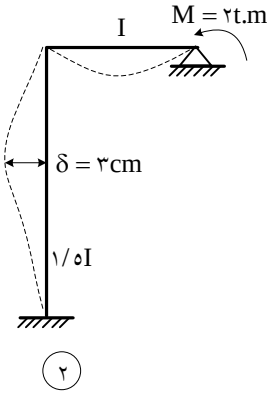
قضایای تقابل کار و تغییر مکان (بتی- ماکسول):

- کار انجام شده توسط نیروی $P_۱$ (یا $M_۱$) بر اثر تغییر مکان ناشی از نیروی $P_۲$ (یا $M_۲$) برابر است با کار انجام شده توسط نیروی $P_۲$ (یا $M_۲$) بر اثر تغییر مکان ناشی از نیروی $P_۱$ (یا $M_۱$).

– تغییر مکان در نقطه ۱ وقتی بار در نقطه ۲ است برابر است با تغییر مکان در نقطه ۲ وقتی همان بار در نقطه ۱ است.

مثال) (کنکور ارشد ۸٤) با توجه به اشکال ۱ و ۲ مقدار p چقدر است؟





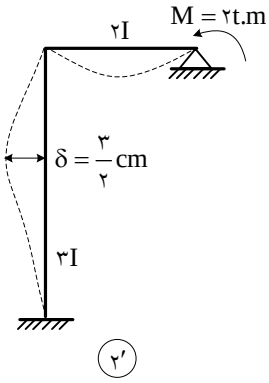
۱) $p = -۱t$

۲) $p = \frac{۲}{۳}t$

۳) $p = \frac{۴}{۳}t$

٤) $p = \frac{۸}{۳}t$

حل: از آنجا که سختی دو سازه با هم متفاوت است بهتر است یکی از سازه‌ها را بـه لحـاظ سـختی معـادل سـازه دیگـر نمـود. در ایـن صورت، اگر سختی عضوی n برابر شود، تغییر مکان‌ها و چرخش‌های آن عضو $\frac{۱}{n}$ برابر می‌شود. اگر سازه ۲ را معادل کنیم داریم:



حال با نوشتن رابط بتی ماکسول بین سازه‌های ۱ و '۲ داریم:

$$p \times \left(-\frac{۳}{۲}cm\right) = (۲t.m)(-۰/۰۲rad) \Rightarrow p = \frac{۸}{۳}t$$

گزینه ٤ صحیح است.

مدلسازی با فنر:

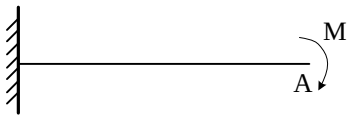
در این روش سختی‌های دورانی و انتقالی هر یک از اعضاء سازه به صورت یک فنر با سختی معادل تبدیل شده و با استفاده از ایـده فنرهـای سری و موازی تغییر مکان یا چرخش مورد نظر به دست می‌آید.

دو فنر موازیند اگر تغییر مکان یکسانی داشته باشند و سری هستند اگر نیـروی یکـسانی داشـته باشـند. نیـرو در فنرهـای مـوازی بـه نـسبت سختی‌هایشان تقسیم می‌شود. سختی کل گره در حالت فنرهای موازی برابر با مجموع سختی‌های فنرهای معادل می‌باشد. و در حالـت سـری داریم:

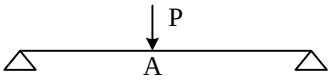
$$\frac{۱}{k_T} = \sum_{i=۱}^{N} \frac{۱}{k_i}$$

– توصیه می‌شود، سختی‌های زیر را به خاطر بسپارید: (همه سختی‌ها مربوط به نقطه اعمال بار می‌باشند)

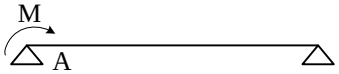
$$K = \frac{۳EI}{L^۳}$$



$$K_\theta = \frac{۲EI}{L}$$

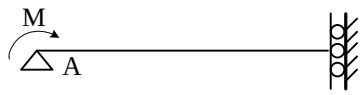


$$k = \frac{٤۸EI}{L^۳}$$

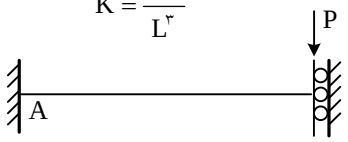


$$K_\theta = \frac{۳EI}{L}$$

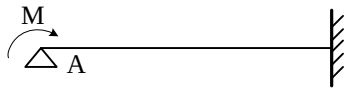
$$K=\frac{3EI}{L^3}$$



$$K_\theta=\frac{EI}{L}$$

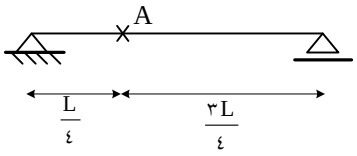


$$K=\frac{12EI}{L^3}$$

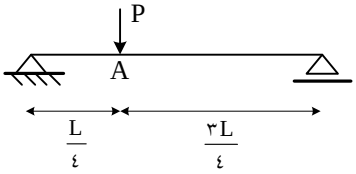


$$K_\theta=\frac{4EI}{L}$$

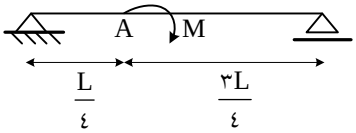
مثال) طول L را چنان بیابید که نسبت سختی دورانی به سختی انتقالی $\left(\frac{k_\theta}{k}\right)$ در نقطه A از تیر زیر برابر با یک شود.



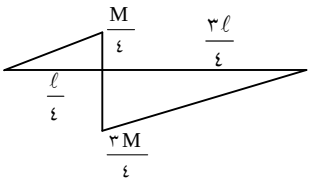
حل اولاً دقت کنید همواره سختی دورانی و انتقالی باید برای یک نقطه خاص تعریف شوند ثانیاً سختی انتقالی مقدار باری است که تغییر مکان متناظرش برابر واحد گردد و سختی دورانی در یک نقطه مقدار لنگری است که چرخش متناظرش برابر با واحد باشد.



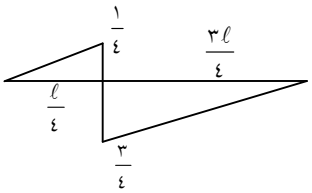
$$\Delta_A=\frac{p\left(\frac{l}{4}\right)^2\left(3\frac{l}{4}\right)^2}{3EIl}=\frac{3pl^3}{256EI}\xrightarrow[p\to k]{\Delta_A=1}k=\frac{256EI}{3l^3}$$



$\xrightarrow{\text{محاسبه } \theta_A}$



لنگر در سازه اصلی



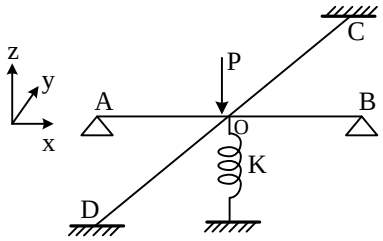
لنگر در سازه بار واحد

$$\Rightarrow\theta_A=\frac{1}{3}.\frac{M}{4}.\frac{1}{4}.\frac{l}{4}.\frac{1}{EI}+\frac{1}{3}.\frac{3M}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3l}{4}.\frac{1}{EI}=\frac{7Ml}{48EI}\ \frac{\theta_A=1}{M\to k_\theta}k_\theta=\frac{48EI}{7l}$$

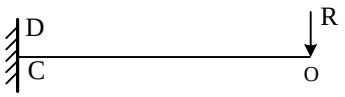
$$\Rightarrow\frac{k_\theta}{k}=\frac{\frac{48EI}{7l}}{\frac{256EI}{3l^3}}=\frac{9}{112}l^2\to l=\sqrt{\frac{112}{9}}$$

مثال) در سازه روبرو اگر در حالت ۱ گرهٔ O مفصل و در حالت ۲ گره O صلب باشد، نسبت $\frac{(\Delta_\circ)_1}{(\Delta_\circ)_2}$ چقدر است؟ $\left(k=\frac{12EI}{l^3}\right)$

$(OA=OB=OC=OD=L)$



حل در حالت ۱ اعضای OD و OC به صورت زیر مدل می‌شوند:



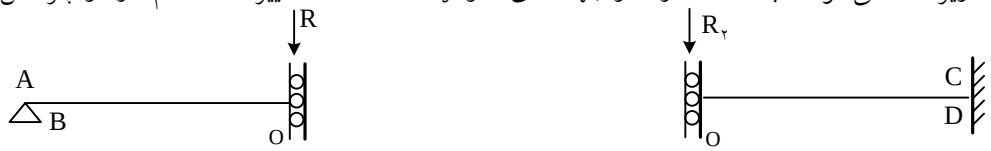
$$\to k=\frac{3EI}{l^3}$$

و اعضای دو سر مفصل OA و OC، هیچ‌گونه سختی خمشی ندارند. $(k_{OA}=k_{OB}=\circ)$

و از آنجا که مجموعه چهار میله و فنر در نقطه O یک تغییر مکان دارند، موازی می‌باشند و داریم:

$$\Rightarrow k_{TO} = ۲\times\frac{۳EI}{l^۳}+\frac{۱۲EI}{l^۳}=\frac{۱۸EI}{l^۳}\Rightarrow(\Delta_\circ)_۱=\frac{pl^۳}{۱۸EI}$$

در حالت ۲ اعضا به صورت زیر مدل می‌شوند: (به علت تقارن در جهت‌های x و y، نقطه O فقط تغییر مکان قائم دارد و چرخش ندارد)



$$K=\frac{۳EI}{L^۳} \qquad\qquad K=\frac{۱۲EI}{L^۳}$$

$$\Rightarrow k_{TO} = ۲\times\frac{۳EI}{l^۳}+۲\times\frac{۱۲EI}{l^۳}+\frac{۱۲EI}{l^۳}=\frac{۴۲EI}{l^۳}\Rightarrow(\Delta_\circ)_۲=\frac{pl^۳}{۴۲EI}\Rightarrow\frac{(\Delta_\circ)_۱}{(\Delta_\circ)_۲}=\frac{۴۲}{۱۸}=\frac{۷}{۳}$$

مثال) (کنکور ارشد ۸۳): مقدار جابجایی نقطه c و لنگر M_A در تیر شکل زیر برابر است با:

۱) $-\frac{pl}{۲}, \frac{۸pl^۳}{۱۵EI}$ ۲) $-\frac{۲pl}{۵}, \frac{۴pl^۳}{۳EI}$

۳) $-\frac{۲pl}{۵}, \frac{۴pl^۳}{۱۵EI}$ ٤) $-\frac{۴pl}{۵}, \frac{pl^۳}{۲EI}$

حل می‌توان تیرهای AC و BC را معادل فنر در نظر گرفت و با توجه به تغییر مکان یکسان در نقطه C می‌دانیم که فنرها با هم موازیند سپس:

$$k_{AC}=\frac{۳\times۲EI}{(۲l)^۳}=\frac{۳EI}{۴l^۳} \quad , \quad k_{BC}=\frac{۳EI}{l^۳}\Rightarrow k_C=k_{AC}+k_{BC}=\frac{۱۵EI}{۴l^۳}\Rightarrow\Delta_C=\frac{p}{k_c}=\frac{۴pl^۳}{۱۵EI}$$

- نیروی P به صورت نیروی برشی و به نسبت سختی‌های تیرها بینشان تقسیم می‌شوند:

$$V_{AC}=p\times\frac{k_{AC}}{k_C}=p\times\frac{\frac{۳EI}{۴l^۳}}{\frac{۱۵EI}{۴l^۳}}=\frac{p}{۵}\Rightarrow M_A=(V_{AC})(۲l)=\frac{۲pl}{۵}$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

نکته آخر:

شاید به جرأت بتوان گفت که درس تحلیل سازه‌ها تنها درسی است که اکثر مسائل آن را می‌توان از ۲ یا ۳ یا ٤ و .... روش متنوع و گوناگون حل نمود. به عنوان نکته آخر، به همه عزیزان توصیه می‌شود که تا جایی که امکان دارد مسائل تحلیل سازه‌ها را از ۲ یا ۳ روش حل و نتایج، راه‌حل‌ها و زمان‌ها را با هم مقایسه نمائید. با این شیوه هم تسلط خود را بر همه مباحث و روش‌ها افزایش داده‌اید و هم متوجه خواهید شد کدام روش‌ها در کدام مسائل (و با چه خواسته‌هایی) مناسب و راه‌گشا خواهند بود.